

## DAS TOTALE DIFFERENTIAL

Betrachten wir das totale Differential zuerst in seiner einfachsten Form. Gegeben sei folgende univariate Funktion:

$$y = f(x) \text{ mit der Ableitung } \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Verändern wir  $x$ , so ergibt sich als **absolute** Änderung des Funktionswertes annäherungsweise:

$$df(x) = dy \approx f'(x) \cdot dx.$$

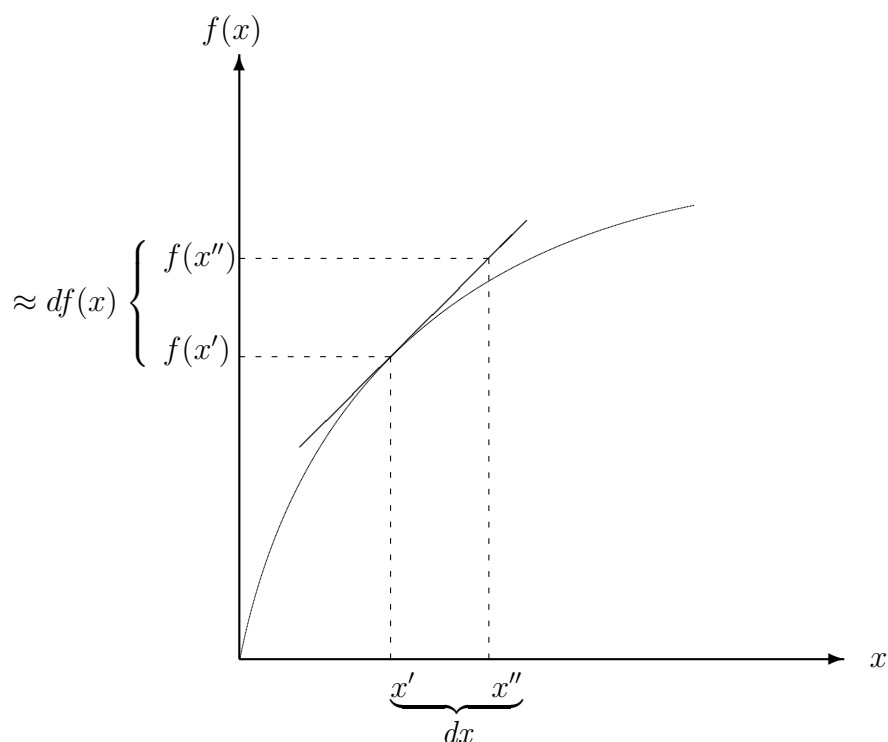
Beachte, dass diese Approximation umso genauer ist, je kleiner  $dx$  ist, d.h. je näher  $x'$  und  $x''$  zusammenliegen. Im Limit, wenn  $dx \rightarrow 0$  ist diese Annäherung exakt.

Beispiel: Sei  $f(x) = \sqrt{x}$ , und  $x' = 4$ ,  $x'' = 9$ . Die absolute Veränderung des Funktionswertes, wenn man sich von  $x'$  nach  $x''$  bewegt, ist gegeben durch  $f(9) - f(4) = 1$ .

Benutzen wir die Annäherung, so ergibt sich

$$dy \approx f'(4) \cdot (9 - 4) = 1,25,$$

was schon eine recht gute Annäherung ist. Lassen wir  $x''$  näher zu  $x'$  wandern, so wird der Schätzfehler immer kleiner (Überprüfen Sie das!).



Das totale Differential ist sehr nützlich, wenn man die Steigung von Indifferenzkurven (oder anderen beliebigen Isohöhenlinien) berechnen möchte. Entlang einer Indifferenzkurve ist der Nutzen konstant, d.h. wird der Konsum eines Gutes erhöht, so muss sich der Konsum eines anderen Gutes verringern.

Angenommen, die Nutzenfunktion  $u(x_1, x_2)$  ist gegeben und ausgehend von dem Güterbündel  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  wird dem Konsumenten etwas mehr von dem Gut  $x_1$  gegeben. Dann verändert sich sein Nutzen ungefähr um

$$du \approx \frac{\partial u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} \cdot dx_1.$$

Um auf einer Indifferenzkurve zu bleiben, muss dem Konsumenten genau soviel von  $x_2$  weggenommen werden, dass der Nutzenverlust aus dem geringeren Konsum von Gut 2 den Nutzengewinn aus dem Mehrkonsum von Gut 1 genau kompensiert, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} \cdot dx_1 &\stackrel{!}{=} \frac{\partial u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \cdot (-dx_2) \iff \\ \frac{\partial u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \cdot dx_2 &= 0. \end{aligned}$$

Aber das ist genau die Bedingung, die wir erhalten, wenn wir das totale Differential der Nutzenfunktion (unter der Bedingung, dass sich der Nutzen nicht verändern darf) bilden.

Beispiel: Dieses Beispiel soll illustrieren, dass uns das totale Differential das Leben bei der Berechnung der Steigung von Isohöhenlinien einfacher macht. Gegeben sei folgende Cobb-Douglas- Nutzenfunktion

$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha \cdot x_2^\beta, \text{ die äquivalent ist zu } \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2.$$

Eine Möglichkeit, die Steigung der Indifferenzkurve zu berechnen ist, die Nutzenfunktion für ein konstantes Nutzenniveau nach  $x_2$  aufzulösen und danach die Ableitung nach  $x_1$  zu bilden.

Entlang einer Indifferenzkurve gilt:

$$\begin{aligned} \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 = \bar{u} = \text{const.} &\iff \beta \ln x_2 = \bar{u} - \alpha \ln x_1 \implies \\ x_2 &= e^{\frac{\bar{u}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} x_1}. \end{aligned}$$

Ableiten nach  $x_1$  ergibt:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \underbrace{e^{\frac{\bar{u}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} x_1}}_{=x_2} \cdot \left(-\frac{\alpha}{\beta x_1}\right) = -\frac{\alpha x_2}{\beta x_1}.$$

Eine sehr viel weniger aufwendige Form der Berechnung ist das totale Differential:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \cdot dx_2 = 0 \iff \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2}.$$

Für obige Nutzenfunktion ergibt sich

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\alpha/x_1}{\beta/x_2} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}.$$