

## 4 Theorie der Konsumentennachfrage

### Literatur:

- McKenna und Rees (1992), Chapter 7.
- Gravelle und Rees (1992), Chapter 4 A-C.
- MasColell, Whinston, Green (1995), Chapter 3.

### 4.1 Einführung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der klassischen Nachfrage-  
theorie, bei der wir alles, was wir bisher an Methoden gelernt haben,  
noch einmal anwenden und in Aktion sehen können. Gleichzeitig ist die  
Theorie der Konsumentennachfrage eine wichtige Grundlage für viele  
Probleme in der Finanzwissenschaft, der allgemeinen Gleichgewichts-  
theorie und der Aussenhandelstheorie.

### 4.2 Die Marshallsche Nachfragefunktion

Wir betrachten das Nutzenmaximierungsproblem des Konsumenten:

$$\max_{x_1, \dots, x_n} U(x_1, \dots, x_n)$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = m$$

Wir nehmen an, daß die Nutzenfunktion des Konsumenten streng monoton steigend und strikt quasikonkav ist. Dann folgt aus Theorem 2.2 daß die Bedingungen erster Ordnung des zugehörigen Lagrange Problems notwendig und hinreichend für die optimale Lösung sind.

Auflösen dieser Bedingung nach  $x_1, \dots, x_n$  und  $\lambda$  gibt uns die optimale Konsumentenscheidung des Konsumenten in Abhängigkeit von Preisen und Einkommen:

$$x_i^* = x_i^*(p, m), \quad i = 1, \dots, n$$

Wir nennen  $x_i^*(p, m)$  die **Marshallische Nachfragefunktion** des Konsumenten und bezeichnen sie im folgenden mit  $D_i(p, m)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ).

### 4.3 Die indirekte Nutzenfunktion

Wenn wir die Marshallische Nachfrage wieder in die Nutzenfunktion einsetzen, erhalten wir eine Wertfunktion, nämlich den maximal erreichbaren Nutzen des Konsumenten bei gegebenen Preisen und Einkommen

$$U(x^*) = U(D_1(p, m), \dots, D_n(p, m)) \equiv v(p, m) .$$

Diese Funktion  $v(p, m)$  wird auch **indirekte Nutzenfunktion** genannt. Sie gibt den höchsten Nutzen an, der bei Preisen  $p$  und Budget  $m$  erreichbar ist.

**Theorem 4.1** *Die indirekte Nutzenfunktion ist*

- 1) *homogen vom Grade 0 in  $(p, m)$ ,*
- 2) *nicht steigend in  $p$  und*
- 3) *steigend in  $m$ .*

**Beweis:**

1)

2)

3)

**Theorem 4.2 (Roys Identität)**

$$\frac{\partial v^*(p, m)}{\partial p_i} = -D_i(p, m) \frac{\partial v^*(p, m)}{\partial m} .$$

In Worten: Die Ableitung der indirekten Nutzenfunktion nach  $p_i$  ist nicht positiv und betragsmäßig gleich dem Produkt aus der Nachfrage nach Gut  $i$  und dem Grenznutzen des Einkommens.

**Beweis:** Der Beweis ist eine einfache Anwendung des Envelope Theorems.

$$\frac{dv^*(p, m)}{dp_i} = -\lambda x_i^*(p, m)$$

Außerdem folgt aus dem Envelope Theorem:

$$\frac{\partial v^*(p, m)}{\partial m} = \lambda$$

(Woher kennen Sie dieses Resultat bereits?) Einsetzen und verwenden von  $x_i^*(p, m) = D_i(p, m)$  ergibt:

$$\frac{\partial v^*(p, m)}{\partial p_i} = -D_i(p, m) \frac{\partial v^*(p, m)}{\partial m} .$$

*Q.E.D.*

**Intuition:** Wie verändert sich der höchste erreichbare Nutzen, wenn  $p_i$  um  $\Delta p_i$  steigt? Die Preiserhöhung verringert das Einkommen des Konsumenten, das für sonstige Güter zur Verfügung steht, in erster Näherung um  $-\Delta p_i \cdot x_i^*$ . Im Optimum ist der Grenznutzen pro Geldeinheit in allen Verwendungsarten gleich groß und gleich dem Grenznutzen einer zusätzlichen Einkommenseinheit. Also entspricht der Nutzenverlust dem Produkt aus Einkommensenkung ( $-\Delta p_i x_i^*$ ) und Grenznutzen des Einkommens ( $\frac{\partial v}{\partial m}$ ).

Beachten Sie, daß eine Preiserhöhung auch dazu führt, daß der Konsument (normalerweise) weniger von Gut  $i$  und dafür mehr von den anderen Gütern konsumieren möchte. Roys Identität sagt, daß wir diesen Effekt ignorieren können. Das gilt aber nur bei marginalen Preisänderungen.

Roys Identität kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$D_i(p, m) = -\frac{\partial v(p, m)}{\partial p_i} / \frac{\partial v(p, m)}{\partial m}.$$

Wenn die indirekte Nutzenfunktion gegeben ist, ist es viel leichter, die Marshallsche Nachfragefunktion  $D_i(p, m)$  über Roys Identität abzuleiten, als über die Maximierung der (direkten) Nutzenfunktion zu gehen.

### Beispiel: Cobb-Douglas Nutzenfunktion

$$U(x_1, x_2) = x_1^\alpha \cdot x_2^{1-\alpha}$$

Diese Nutzenfunktion ist äquivalent zu (warum?)

$$\tilde{U}(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2$$

Marshallische Nachfragefunktionen:

$$\begin{aligned} D_1(p_1, p_2, m) &= x_1^* = \frac{\alpha m}{p_1} \\ D_2(p_1, p_2, m) &= x_2^* = \frac{(1 - \alpha)m}{p_2} \end{aligned}$$

Indirekte Nutzenfunktion:

$$\tilde{v}(p_1, p_2, m) = \ln [\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha}] + \ln m - \alpha \ln p_1 - (1 - \alpha) \ln p_2$$

- Zeigen Sie die Eigenschaften aus Theorem 4.1.
- Leiten Sie  $D_i(p_1, p_2, m)$  über Roys Identität ab.

Wenn wir den Nutzen wieder in Einheiten der ursprünglichen Nutzenfunktion messen wollen, dann müssen wir die indirekte Nutzenfunktion retransformieren und erhalten:

$$v(p_1, p_2, m) = e^{\tilde{v}(p_1, p_2, m)} = \alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha} \frac{m}{p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}}.$$

## 4.4 Ausgabenminimierung

Bisher haben wir das **Nutzenmaximierungsproblem (NMP)** des Konsumenten betrachtet:

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} U(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

unter der Nebenbedingung:

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq m$$

Jetzt betrachten wir die Konsumententscheidung aus einer anderen Perspektive und fragen: Wie kann der Konsument seine Ausgaben minimieren, um ein gegebenes Nutzenniveau zu erreichen.

### Ausgabenminimierungsproblem (AMP):

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

unter der Nebenbedingung:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq u$$

Das AMP ist das **“duale Problem”** zum NMP. In beiden Problemen geht es darum, die vorhandenen Ressourcen so effizient wie möglich einzusetzen:

- NMP: das vorhandene Budget soll zu einem möglichst hohen Nutzen führen.
- AMP: der vorgegebene Nutzen soll möglichst kostengünstig erreicht werden.

Aber: Die beiden Probleme vertauschen die Rolle von Zielfunktion und Nebenbedingung.

- NMP: Zielfunktion Nutzen, NB Budget
- AMP: Zielfunktion Budget, NB Nutzen

Wir werden sehen, daß beide Probleme letztlich äquivalent sind.

Dennoch ist es extrem nützlich, mit beiden Problemen nebeneinander zu arbeiten:

- Das NMP ergibt
  - die Marshallsche Nachfragefunktion  $D(p, m)$
  - die indirekte Nutzenfunktion  $v(p, m)$
- Das AMP ergibt
  - die Hicksche Nachfragefunktion  $H(p, u)$
  - die Ausgabenfunktion  $m(p, u)$

**Exkurs:** Es gibt viele Paare von Problemen, die formal sehr ähnlich sind, sich aber dadurch unterscheiden, daß die Rolle von Nebenbedingung und Zielfunktion vertauscht sind. Beispiel: Gewinnmaximierung versus Kostenminimierung.

Die **Dualitätstheorie** beschreibt allgemein die formalen Beziehungen zwischen solchen “primalen” und “dualen” Problemen. Wir werden die Dualitätstheorie jedoch nicht allgemein einführen, sondern alle Beziehungen in unserem konkreten Problem selbst herleiten.

### Ausgabenminimierungsproblem (AMP):

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

unter der Nebenbedingung:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq u$$

Zur Vereinfachung ignorieren wir hier die Möglichkeit einer Randlösung.

Zunächst bringen wir dieses Problem in die Form eines Standard-Maximierungsproblems

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} - \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

unter der Nebenbedingung:

$$-U(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq -u$$

Diese Nebenbedingung muß binden. (Warum?)

Lagrange-Ansatz:

$$L = -\sum_{i=1}^n p_i x_i - \lambda[u - U(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

Bedingungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -p_i + \lambda \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -u + U(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

Aus den BEO folgt unmittelbar:

$$\frac{p_1}{U_1} = \dots = \frac{p_n}{U_n} = \lambda$$

bzw.:

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{U_i}{U_j}$$

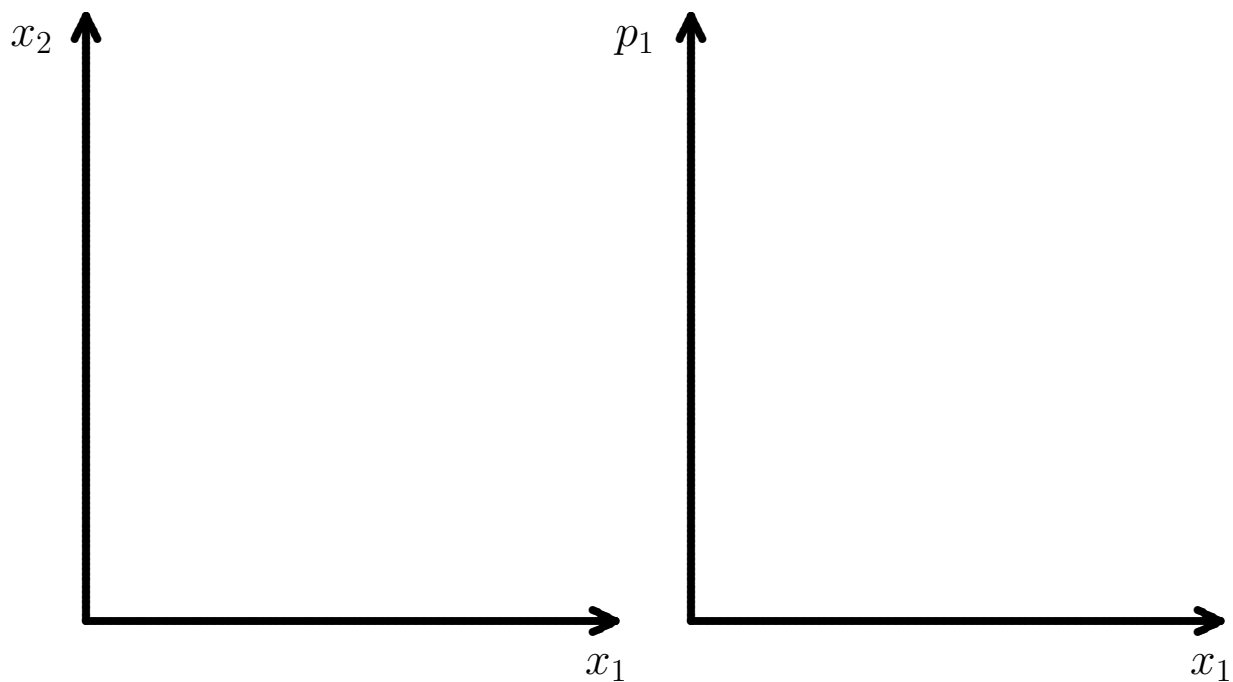
Das ist dieselbe Bedingung wie im NMP: die Grenzrate der Substitution muß gleich dem Preisverhältnis sein.

Die (eindeutige) Lösung  $x^*$  des Ausgabenminimierungsproblems ist eine stetige Funktion von  $p$  und  $u$ :

$$x_i^* = H_i(p, u)$$

Die Funktion  $H_i(p, u)$  wird auch **Hicksche Nachfragefunktion** oder **kompensierte Nachfragefunktion** genannt:  $\frac{\partial H_j(p, u)}{\partial p_i}$  gibt an, wie

sich die Nachfrage nach Gut  $j$  bei einer marginalen Erhöhung von  $p_i$  verändert, wenn wir das Einkommen des Konsumenten so kompensieren, daß er wieder das alte Nutzenniveau  $u$  erreichen kann. Insbesondere mißt  $\frac{\partial H_i(p,u)}{\partial p_i}$  den (eigenen) Substitutionseffekt einer Preisänderung.



Figur 4.1: Die Hicksche Nachfragefunktion

## 4.5 Die Ausgabenfunktion

Angenommen  $x^*$  löst das AMP. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i^* = \sum_{i=1}^n p_i H_i(p, u) \equiv m(p, u)$$

$m(p, u)$  ist die **Ausgabenfunktion**. Sie beziffert die minimalen Ausgaben, die bei Preisen  $p$  notwendig sind, um das Nutzenniveau  $u$  zu erreichen.

**Theorem 4.3** Die Ausgabenfunktion  $m(p, u)$  ist

1. homogen vom Grade 1 in  $p$
2. nicht-fallend in  $p$
3. nicht-fallend in  $u$

**Beweis:**

1.

2.

3.

**Theorem 4.4 (Shephards Lemma)**

$$\frac{\partial m^*(p, u)}{\partial p_i} = x_i^* = H_i(p, u)$$

*In Worten: Die Ableitung der Ausgabenfunktion nach  $p_i$  ist gleich der Hickschen Nachfrage nach Gut  $i$ .*

**Beweis:** Der Beweis ist wieder eine einfache Anwendung des Envelope Theorems.

$$m^*(p, u) = \sum_{k=1}^n p_k H_k(p, u)$$
$$\frac{\partial m^*(p, u)}{\partial p_i} = H_i(p, u) + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial H_k(p, u)}{\partial p_i}$$

Wir wollen zeigen, daß der zweite Term gleich 0 ist. Wir wissen, daß im Ausgabenminimum gelten muß:

$$p_k - \lambda U_k = 0$$

Also gilt:

$$\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial H_k}{\partial p_i} = \lambda \sum_{k=1}^n U_k \frac{\partial H_k}{\partial p_i}$$

Außerdem wissen wir, daß im Ausgabenminimum gelten muß:

$$u(x_1^*, \dots, x_n^*) = U(H_1(p, u), \dots, H_n(p, u)) = u$$

Totales Differenzieren dieser Gleichung nach  $p_i$  ergibt:

$$U_1 \frac{\partial H_1^*(p, u)}{\partial p_i} + \dots + U_n \frac{\partial H_n^*(p, u)}{\partial p_i} = 0$$

Also ist der 2. Term oben tatsächlich gleich 0.

*Q.E.D.*

**Intuition:** In endlicher Approximation sagt Shephards Lemma

$$\Delta m(p, u) = H_i(p, u) \cdot \Delta p_i = x_i^* \cdot \Delta p_i$$

Angenommen, der Konsument konsumiert im Optimum 3 Flaschen Wein zum Preis von je DM 10,- . Jetzt steigt der Preis pro Flasche Wein um DM 0,01. Shephards Lemma sagt, daß die minimalen Ausgaben des Konsumenten, um nach der Preisänderung sein altes Nutzenniveau halten zu können, approximativ um

$$\Delta m = 3 \cdot DM0,01 = DM0,03$$

steigen müssen. Solange die Preisänderung sehr klein ist, müssen wir nicht berücksichtigen, daß der Konsument bei einer Preisänderung Wein durch Bier substituieren wird. Bei größeren Preisänderungen muß dieser Substitutionseffekt aber zusätzlich berücksichtigt werden.

Shephards Lemma ist sehr nützlich, um die Hickschen Nachfragefunktionen über die Ausgabenfunktion abzuleiten.

### Beispiel: Cobb-Douglas Nutzenfunktion

Verwenden Sie  $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ .

AMP  $\Rightarrow$  Hicksche Nachfragefunktionen:

$$H_1(p_1, p_2, u) = x_1^* = \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\alpha} u$$
$$H_2(p_1, p_2, u) = x_2^* = \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{p_2}{p_1} \right)^{-\alpha} u$$

Ausgabenfunktion:

$$m^*(p_1, p_2, u) = [\alpha^{-\alpha} (1-\alpha)^{\alpha-1}] p_1^\alpha p_2^{1-\alpha} u$$

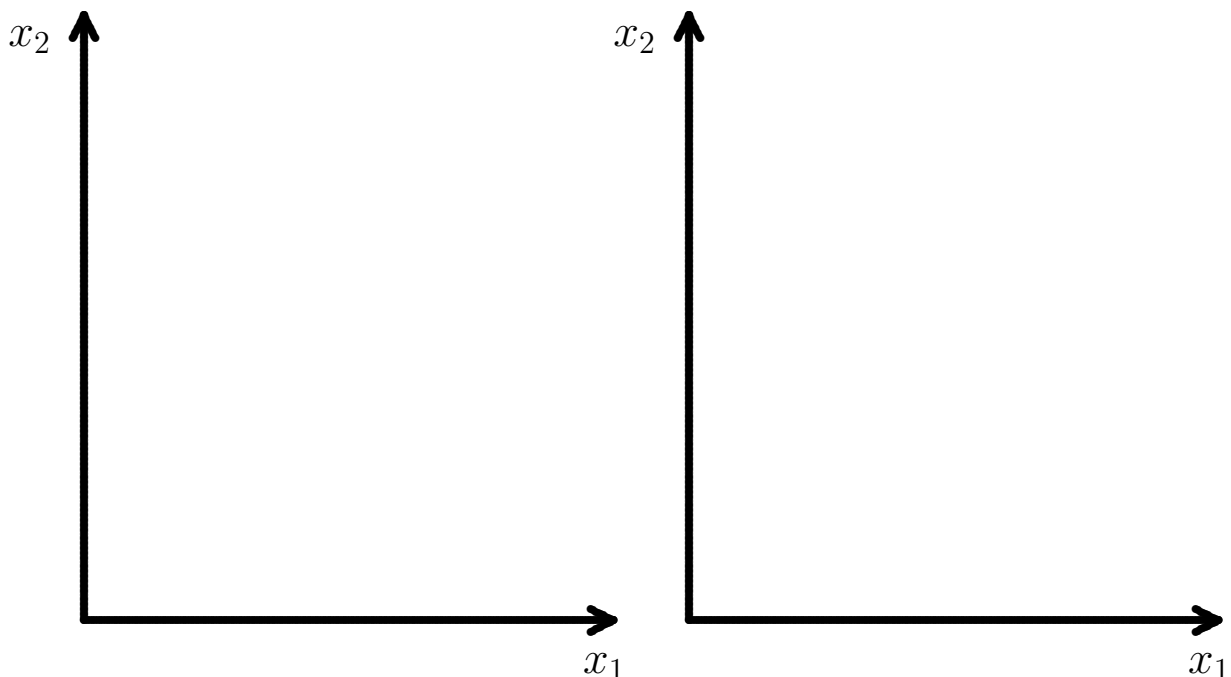
- Überprüfen Sie die Eigenschaften aus Theorem 4.3.
- Leiten Sie Hickschen Nachfragefunktionen mit Hilfe von Shephards Lemma ab.
- Leiten Sie die indirekte Nutzenfunktion durch Invertieren aus der Ausgabenfunktion ab.
- Leiten Sie die Ausgabenfunktion durch Invertieren aus der indirekten Nutzenfunktion ab.

## 4.6 Dualität von NMP und AMP

**Theorem 4.5** *Betrachte einen Konsumenten, der Preisen  $p$  gegenübersteht:*

- 1) *Wenn  $x^*$  sein NMP bei Einkommen  $m$  löst, dann ist  $x^*$  gleichzeitig das optimale Güterbündel in seinem AMP, wenn der zu erreichende Nutzen  $u = U(x^*)$  ist. Außerdem sind die minimalen Ausgaben in diesem AMP genau  $m$ .*
- 2) *Wenn  $x^*$  sein AMP beim Nutzenniveau  $u$  löst, dann ist  $x^*$  gleichzeitig das optimale Güterbündel in seinem NMP, wenn das verfügbare Einkommen  $\sum p_i x_i^*$  ist. Außerdem ist der maximale Nutzen in diesem NMP genau  $u$ .*

Aus der graphischen Analyse ist offensichtlich, daß NMP und AMP zu demselben Ergebnis führen müssen, wenn  $m$  bzw.  $u$  entsprechend gewählt werden:



Figur 4.2: Dualität von NMP und AMP

Da das NMP und das AMP äquivalent sind, müssen die folgenden Identitäten erfüllt sein:

1)  $m(p, v(p, m)) \equiv m$

Die minimalen Ausgaben zur Erreichung des Nutzens  $v(p, m)$  sind genau gleich  $m$ .

2)  $v(p, m(p, u)) \equiv u$

Der maximale Nutzen aus dem Einkommen  $m(p, u)$  ist gleich  $u$ .

3)  $D_i(p, m) \equiv H_i(p, v(p, m))$

Die Marshallsche Nachfrage beim Einkommen  $m$  ist gleich der Hickschen Nachfrage beim Nutzen  $v(p, m)$ .

4)  $H_i(p, u) \equiv D_i(p, m(p, u))$

Die Hicksche Nachfrage beim Nutzen  $u$  ist gleich der Marshallschen Nachfrage beim Einkommen  $m(p, u)$ .

### Beispiel: Cobb-Douglas Nutzenfunktion

Zeigen Sie für den Cobb-Douglas Fall:

1)  $m(p, v(p, m)) \equiv m$

2)  $v(p, m(p, u)) \equiv u$

3)  $D_i(p, m) \equiv H_i(p, v(p, m))$

4)  $H_i(p, u) \equiv D_i(p, m(p, u))$

Es gibt auch eine enge Beziehung zwischen der indirekten Nutzenfunktion und der Ausgabenfunktion:

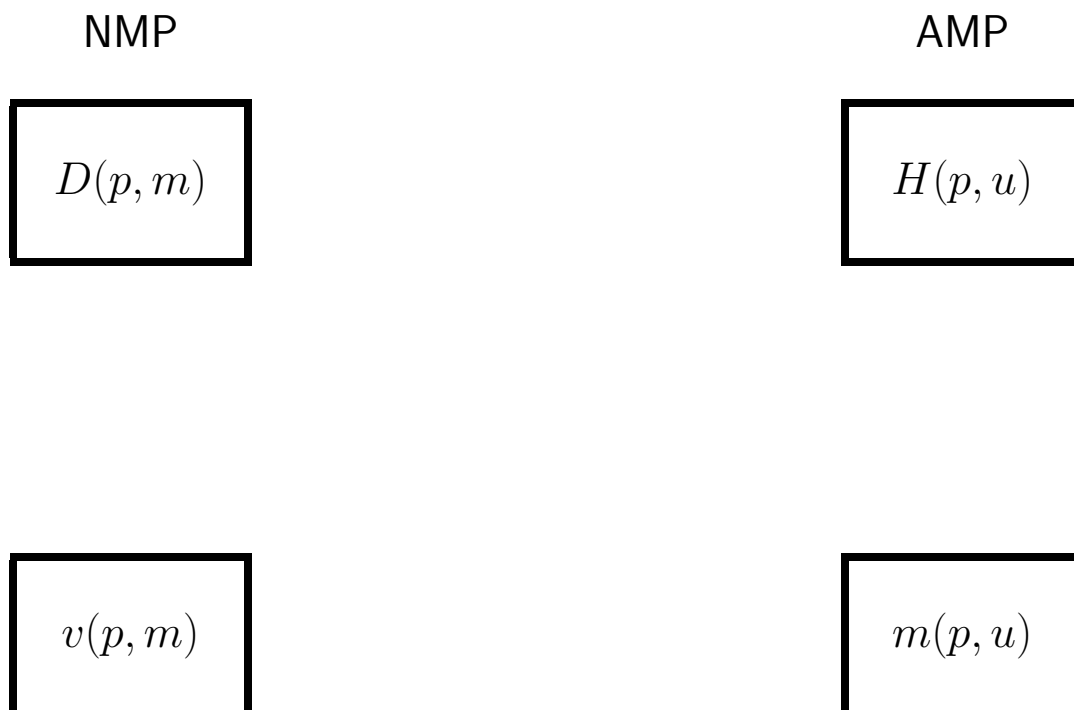
- Die indirekte Nutzenfunktion ist streng monoton steigend im Einkommen. Also können wir die Umkehrfunktion bilden, die nichts

anderes ist als die Ausgabenfunktion.

- Umgekehrt gilt: Die Ausgabenfunktion ist streng monoton steigend im Nutzen. Wenn wir die Umkehrfunktion der Ausgabenfunktion bilden, erhalten wir die indirekte Nutzenfunktion.

Beide Funktionen enthalten exakt dieselbe Information wie die direkte Nutzenfunktion aus der sie abgeleitet worden sind. Also können wir jede der drei Funktionen verwenden, um die Präferenzen des Konsumenten zu beschreiben.

Die folgende Übersicht faßt die Beziehungen zwischen NMP und AMP noch einmal zusammen:



Figur 4.3: Beziehungen zwischen NMP und AMP

## 4.7 Die Slutsky Gleichung

**Theorem 4.6 (Slutsky-Gleichung)** Für alle  $(p, m)$  und alle  $u = v(p, m)$  gilt:

$$\frac{\partial D_i(p, m)}{\partial p_j} = \frac{\partial H_i(p, u)}{\partial p_j} - D_j(p, m) \frac{\partial D_i}{\partial m}$$

**Beweis:** Betrachte einen Konsumenten, der Preisen  $p$  und Einkommen  $m$  gegenübersteht und den maximalen Nutzen  $u = v(p, m)$  realisiert. Es gilt:  $H_i(p, u) \equiv D_i(p, m(p, u))$ . Wenn wir beide Seiten nach  $p_j$  differenzieren, ergibt sich für beliebige  $i, j = 1, \dots, n$ :

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j} + \frac{\partial D_i}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial p_j}$$

Shephards Lemma  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j} + \frac{\partial D_i}{\partial m} H_j(p, u)$$

Beachte, daß  $H_j(p, u) = H_j(p, v(p, m)) = D_j(p, m)$ . Also gilt

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{\partial H_i}{\partial p_j} - D_j(p, m) \frac{\partial D_i}{\partial m}$$

*Q.E.D.*

Wenn wir  $i = j$  setzen, erhalten wir die Slutsky-Zerlegung für eine Veränderung des eigenen Preises:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_i} - x_i \frac{\partial D_i}{\partial m}$$

Die Veränderung der Marshallschen Nachfrage nach Gut  $i$  bei einer Veränderung des eigenen Preises  $p_i$  teilt sich auf in

- einen Substitutionseffekt  $\frac{\partial H_i}{\partial p_i}$  und
- einen Einkommenseffekt  $-x_i \frac{\partial D_i}{\partial m}$

## 4.8 Messung von Wohlfahrtseffekten

Angenommen eine wirtschaftspolitische Maßnahme hat Auswirkungen auf die Preise und/oder verfügbaren Einkommen der Konsumenten. Was sind die Wohlfahrtseffekte dieser Veränderungen?

Wir könnten uns zunächst die Nutzenänderungen der betroffenen Konsumenten anschauen. Sei  $(p, m)$  die ursprüngliche Situation und  $(p', m')$  die neue Situation. Dann ist die Nutzenänderung für einen Konsumenten

$$\Delta U = v(p', m') - v(p, m) .$$

Wenn diese Differenz für alle Konsumenten positiv ist, liegt eine Pareto-Verbesserung vor und die Politikmaßnahme sollte durchgeführt werden.

In den seltensten Fällen ist die Entscheidungssituation jedoch so einfach. Es wird fast immer Gewinner und Verlierer durch die Veränderung geben. Darum suchen wir nach einem Maß für die Nutzenänderung des Konsumenten, das es uns ermöglicht, die Nutzenänderungen interpersonell miteinander zu vergleichen.

Der indirekte Nutzen ist dazu ungeeignet, weil

- die Nutzenfunktion unbestimmt bis auf eine monotone Transformation ist und
- Nutzen nicht interpersonell vergleichbar ist.

Alternative: Messung der **Zahlungsbereitschaft** des Konsumenten.

Wieviel ist der Konsument bereit dafür zu bezahlen, daß die Änderung durchgeführt wird, bzw. wieviel Geld müssen wir ihm geben, damit er bereit ist, diese Änderung freiwillig hinzunehmen.

### **Vorteile:**

- 1) Die Nutzenänderung wird für alle Konsumenten mit einem einheitlichen Maßstab gemessen.
- 2) Die Nutzenänderungen sind "im Prinzip" miteinander vergleichbar: Wenn die Summe der Zahlungsbereitschaften der Gewinner größer ist als die Summe der Kompensationen für die Verlierer, dann "sollte" die Politikmaßnahme durchgeführt werden.

### **Aber: Vorsicht!**

- 1) Diese Aussage ist nur gerechtfertigt, wenn
  - (a) die Gewinner die Verlierer auch tatsächlich kompensieren, oder
  - (b) Sie bereit sind, ein schwerwiegendes Werturteil zu unterschreiben: Der zusätzliche Nutzen aus 1 DM hat dasselbe soziale Gewicht unabhängig davon, wer diesen zusätzlichen Nutzen erhält.
- 2) Wir werden gleich sehen, daß es nicht immer eindeutig ist, wie die Zahlungsbereitschaft gemessen werden sollte.

Nehmen wir an, daß der Preis für Gut 1 in der neuen Situation gefallen ist; die anderen Preise und das Einkommen bleiben konstant.

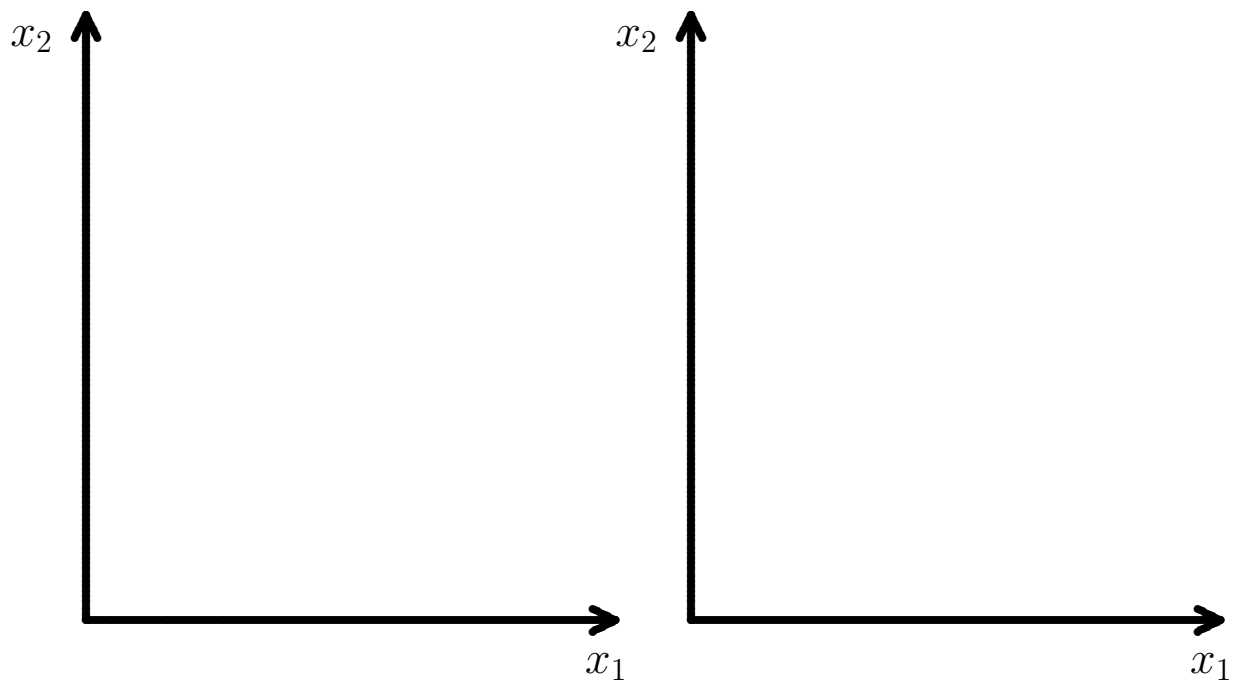
Zwei mögliche Maßstäbe für die Zahlungsbereitschaft:

- 1) **Kompensierende Variation:** Ausgehend von dem Nutzenniveau

in der alten Situation, wieviel Einkommen muss ich dem Konsumenten bei den neuen Preisen wegnehmen, damit sein Nutzen wieder genauso gross ist wie bei den alten Preisen.

- 2) **Äquivalente Variation:** Ausgehend von dem Nutzenniveau in der neuen Situation, wieviel Einkommen muss ich dem Konsumenten bei den alten Preisen zusätzlich geben, damit er dasselbe Nutzenniveau erreicht wie bei den neuen Preisen?

### Graphische Analyse:



Figur 4.4: Kompensierende und äquivalente Variation

Wir können beide Zahlungsbereitschaften auch mit Hilfe der Ausgabenfunktion messen:

$$KV = m(p, u) - m(p', u)$$

$$ÄV = m(p, u') - m(p', u')$$

Die kompensierende Variation geht also vom Nutzen  $u$  in der Ausgangssituation aus, die äquivalente Variation vom Nutzen  $u'$  in der neuen Situation.

Betrachte zunächst KV. Wenn sich nur  $p_1$  ändert, muß gelten:

$$KV = m(p, u) - m(p', u) = \int_{p'_1}^{p_1} \frac{\partial m}{\partial p_1} dp_1 .$$

Shephards Lemma:  $\partial m / \partial p_1 = H_1(p, u)$ . Also gilt:

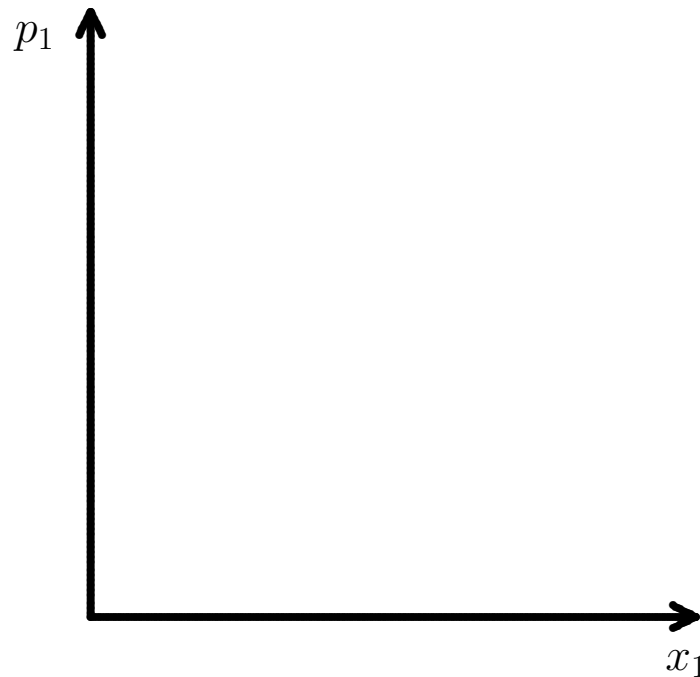
$$KV = m(p, u) - m(p', u) = \int_{p'_1}^{p_1} H_1(p, u) dp_1 .$$

Die kompensierende Variation ist die Fläche unter der Hickschen Nachfragefunktion beim alten Nutzenniveau  $u$ .

Die Hicksche Nachfragefunktion ist nicht direkt beobachtbar. Darum wird oft die **Konsumentenrente**, d.h. die Fläche unter der Marshallischen Nachfragefunktion als Maß für die Zahlungsbereitschaft benutzt.

Aus der Slutsky-Gleichung wissen wir, daß die Hicksche Nachfragefunktion nur den Substitutionseffekt einer Preisänderung reflektiert, während die Marshallische Nachfragefunktion Substitutions- und Einkommenseffekt einer Preisänderung reflektiert.

- $\frac{\partial D(p, m)}{\partial m} = 0 \Rightarrow$  Hicksche und Marshallische Nachfragefunktion identisch.
- $\frac{\partial D(p, m)}{\partial m} > 0 \Rightarrow$  Marshallische Nachfrageänderung bei Preissenkung ist größer als Hicksche Nachfrageänderung.  $\Rightarrow$  Konsumentenrente überschätzt KV.
- $\frac{\partial D(p, m)}{\partial m} < 0 \Rightarrow$  Marshallische Nachfrageänderung bei Preissenkung ist kleiner als Hicksche Nachfrageänderung.  $\Rightarrow$  Konsumentenrente unterschätzt KV.



Figur 4.5: Hicks- und Marshallsche Nachfragefunktionen

Betrachte jetzt die ÄV. Ganz analog gilt:

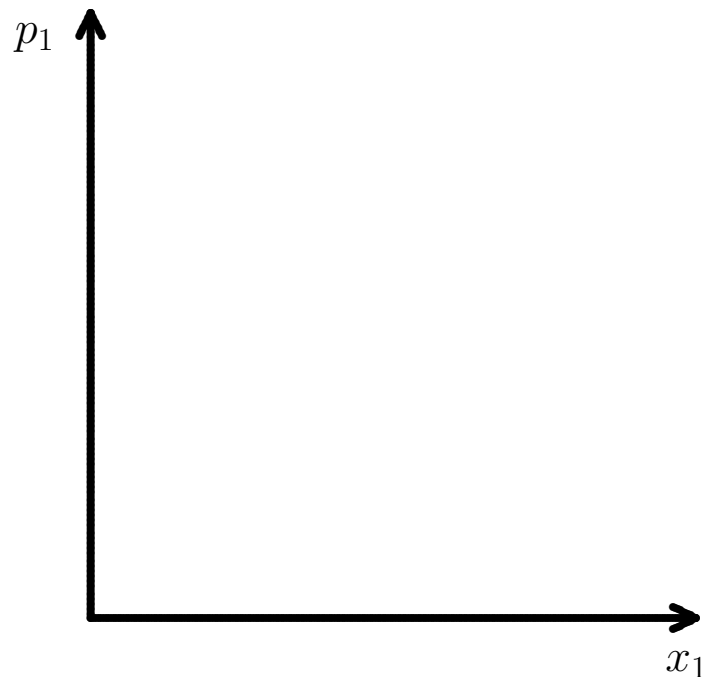
$$\ddot{A}V = m(p, u') - m(p', u') = \int_{p'_1}^{p_1} H_1(p, u') dp_1$$

Die äquivalente Variation ist die Fläche unter der Hickschen Nachfragefunktion beim neuen Nutzenniveau  $u'$ .

Beachten Sie:  $H_1(p, u')$  schneidet die Marshallsche Nachfragefunktion beim **neuen** Preis-Mengen Punkt  $(p'_1, x'_1)$ . Darum betrachten wir jetzt eine Preiserhöhung (hin zum alten Preis  $p_1$ ). Darum gilt jetzt:

- $\frac{\partial D(p, m)}{\partial m} = 0 \Rightarrow$  Hicksche und Marshallsche Nachfragefunktion identisch.
- $\frac{\partial D(p, m)}{\partial m} > 0 \Rightarrow$  Marshallsche Nachfrageänderung bei Preiserhöhung ist größer als Hicksche Nachfrageänderung.  $\Rightarrow$  Konsumentenrente unterschätzt ÄV.

- $\frac{\partial D(p,m)}{\partial m} < 0 \Rightarrow$  Marshallsche Nachfrageänderung bei Preiserhöhung ist kleiner als Hicksche Nachfrageänderung.  $\Rightarrow$  Konsumentenrente überschätzt ÄV.



Figur 4.6: Kompensierende und äquivalente Variation und Konsumentenrente bei normalem Gut

Welches Maß wir für die Messung der Zahlungsbereitschaft verwenden sollten, hängt von der Fragestellung ab.

### Beispiele:

- 1) Der Staat plant eine öffentliche Investition, die zu einer Preissenkung von Gut 1 führt. Investition soll über Kopfsteuer finanziert werden.  $\Rightarrow$

Projekt sollte durchgeführt werden, wenn die KV für jeden Konsumenten größer ist als die Steuer, die er zahlen muß.

- 2) Angenommen, der Staat hat eine bestimmte Summe, die er ausgeben will. Er kann sie entweder ausgeben, um eine öffentliche Investition zu tätigen, die zu einer Preissenkung von Gut 1 führt. Oder er kann eine Steuerrückerstattung vornehmen.  $\Rightarrow$

Projekt durchführen ist besser als Steuerrückerstattung, wenn die äquivalente Variation für jeden Konsumenten größer ist als die Steuerrückerstattung.

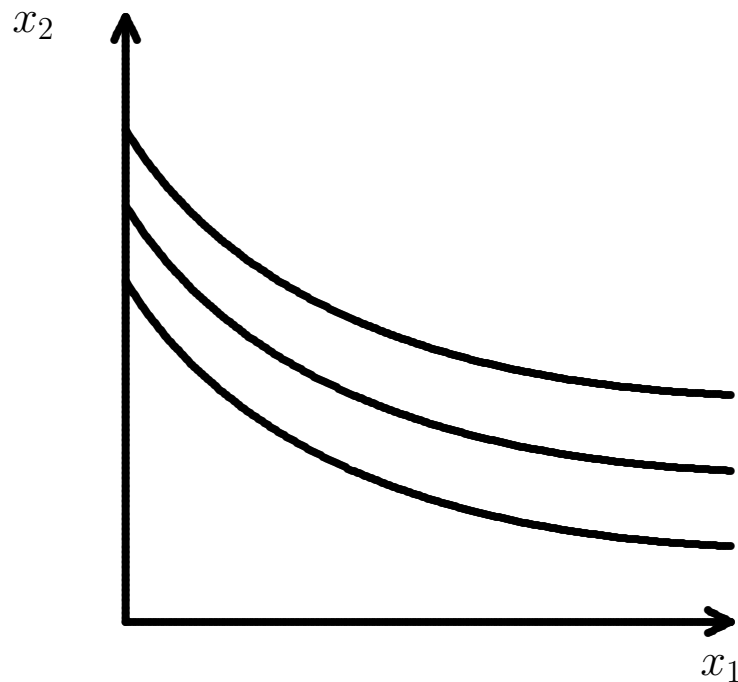
Welches Maß verwendet werden sollte, hängt also von der Ausgangssituation ab.

## Konsumentenrente

Wir haben gesehen, daß die Konsumentenrente nur in einem Spezialfall ein präzises Maß für die Wohlfahrtsänderung ist, nämlich dann, wenn der Einkommenseffekt gleich 0 ist.

Quasi-lineare Präferenzen.

Sei  $x_1$  das Gut, dessen Preis sich ändert, und  $x_2$  das Güterbündel, das alle übrigen Güter umfaßt und dessen Preis wir auf 1 normieren ( $x_2$  ist das Resteinkommen).



Figur 4.7: Quasi-lineare Präferenzen

Bei quasi-linearen Präferenzen sind die Indifferenzkurven parallel:  $\Rightarrow$  keine Einkommenseffekte.

### Quasi-lineare Nutzenfunktion:

$$U(x_1, x_2) = U_1(x_1) + x_2$$

Übungsaufgabe: Zeigen Sie, daß bei einer quasi-linearen Nutzenfunktion die Marshallsche und die Hicksche Nachfragefunktion übereinstimmen und daß die kompensierende Variation gleich der äquivalenten Variation ist. (Betrachten Sie nur eine innere Lösung. Beachten Sie: Präferenzen können nicht für alle Einkommensniveaus quasi-linear sein.)

Bei kleinen Einkommensänderungen sind quasi-lineare Präferenzen oft eine brauchbare lokale Approximation: kleine Einkommensänderungen führen zu keiner Nachfrageänderung für das betreffende Gut.

Wenn wir quasi-lineare Präferenzen unterstellen können, ist die Konsumentenrente ein geeignetes Maß für die Wohlfahrtsmessung:

- Sie stimmt mit der kompensierenden und der äquivalenten Variation überein.
- Wenn eine Maßnahme zu einer Erhöhung der gesamten Konsumentenrente auf einem Markt führt, dann existiert eine Lump-sum Umverteilung, so daß sich alle Konsumenten nach der Maßnahme und der Umverteilung besser stellen als in der Ausgangssituation.