

## 3 Komparative Statik

### Literatur:

- Hoy et.al. (2001), Chapter 14.
- Chiang (1984), Chapter 6-8.

### 3.1 Einführung

Ökonomen interessieren sich häufig dafür, welche Auswirkungen die Veränderung eines exogenen Parameters auf eine gegebene Situation hat:

- Auswirkung einer Erhöhung der Mehrwertsteuer auf den Gleichgewichtspreis auf einem Markt.
- Auswirkung einer Preiserhöhung eines Inputgutes (z.B. Rohöl) auf den Einsatz anderer Inputgüter (Arbeit, Kapital).
- Auswirkung einer Veränderung der Geldmenge auf Zinsniveau und Beschäftigung.
- Auswirkung einer Veränderung des Wechselkurses auf Import- und Exportnachfrage, etc.

In diesem Kapitel werden wir eine allgemeine Methode kennenlernen, mit der man solche komparativ statischen Analysen durchführen kann.

### 3.2 Beispiel 1: Auswirkung einer Einkommensänderung auf das Marktgleichgewicht

Betrachten Sie ein einfaches Marktmodell mit linearen Nachfrage- und Angebotskurven:

$$\begin{aligned} D(p, y) &= a - bp + cy, \quad a, b, c > 0 \\ S(p) &= \alpha + \beta p, \quad \alpha, \beta > 0 \end{aligned}$$

Dabei ist  $p$  der Marktpreis und  $y$  das Einkommen der Konsumenten.

**Übung:** Berechnen Sie die inversen Angebots- und Nachfragekurven und stellen Sie das Gleichgewicht graphisch dar. Zeigen Sie, daß ein Gleichgewicht nur existiert, wenn  $a + cy > \alpha$ .

Berechnung des Gleichgewichts:

$$D(p^*, y) = a - bp^* + cy = \alpha + \beta p^* = S(p^*)$$

$$p^* = \frac{a - \alpha + cy}{b + \beta}$$

$$x^* = \alpha + \beta \frac{a - \alpha + cy}{b + \beta}$$

Wie verändert sich der Gleichgewichtspreis, wenn sich  $y$  verändert?

Der Gleichgewichtspreis ist eine implizite Funktion von  $y$ :

$$p^*(y) = \frac{a - \alpha}{b + \beta} + \frac{c}{b + \beta}y$$

Ableiten nach  $y$  ergibt:

$$\frac{dp^*}{dy} = \frac{c}{b + \beta} > 0$$

### 3.3 Beispiel 2: Das Monopolproblem des Lehrbuchverlages

Betrachten Sie erneut das Beispiel aus Kapitel 1.2, bei dem der Verlag dem Autor einen Tantiemensatz  $t$  als Anteil am Erlös zahlen muß. Wie verändert sich die optimale Menge des Verlages, wenn sich  $t$  verändert?

Maximierungsproblem des Verlages:

$$\max_x (1 - t)(a - bx)x - cx$$

Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{dG}{dx} = (1 - t) \cdot [-bx + a - bx] - c = 0$$

Die Funktion ist global konkav. Also gilt:

$$x^* = \frac{a - \frac{c}{1-t}}{2b}$$

Die optimale Menge des Monopolisten ist eine implizite Funktion von  $t$ . Ableiten nach  $t$  ergibt:

$$\frac{dx^*}{dt} = -\frac{c}{2b(1-t)^2} < 0$$

### 3.4 Das implizite Funktionentheorem bei einer endogenen Variablen

In den beiden Beispielen haben wir den Gleichgewichtspreis bzw. den optimalen Produktionsplan des Monopolisten explizit ausgerechnet, um komparative Statik betreiben zu können. In diesen Beispielen war das ganz einfach. Im Normalfall ist dieses Verfahren jedoch nicht zu empfehlen:

- In den meisten Fällen sind die Funktionen gar nicht bekannt. Wir kennen nur bestimmte Eigenschaften der Funktionen, z.B. daß die Nachfrage mit dem Einkommen steigt und mit dem Preis sinkt, oder daß die inverse Nachfragefunktion des Monopolisten mit der Menge fällt.
- Selbst wenn die Funktionen bekannt sind, sind sie häufig so kompliziert, daß es sehr aufwendig wäre, eine Lösung explizit auszurechnen.

Darum ist es sehr nützlich, das Problem etwas allgemeiner zu betrachten. Wir beginnen mit dem Fall *einer* abhängigen Variablen:

Angenommen, wir betrachten ein ökonomisches Modell, dessen Lösung durch eine Gleichung der Form

$$f(x, \alpha) = 0$$

beschrieben werden kann.

Beispiele:

- Marktmodell aus Beispiel 1. Gleichgewicht wird beschrieben durch die Gleichung

$$D(p, y) - S(p) = 0$$

Hier ist  $f(x, \alpha)$  also  $D(p, y) - S(p)$ , wobei  $p$  die Rolle der abhängigen Variablen  $x$  spielt und  $y$  die Rolle des Parameters (der exogenen Variablen)  $\alpha$ .

- Monopolmodell aus Beispiel 2: Optimaler Produktionsplan wird beschrieben durch die Gleichung

$$(1 - t) \cdot [a - 2bx] - c = 0$$

Hier ist  $f(x, \alpha)$  also  $(1 - t)[a - 2bx] - c$ , wobei die ausgebrachte Menge  $x$  die abhängige Variable und der Tantiemensatz  $t$  der exogene Parameter ist.

Der folgende Satz folgt aus dem **Impliziten Funktionentheorem** und erlaubt es, solche Probleme allgemein zu lösen.

**Theorem 3.1** *Gegeben sei*

$$f(x, \alpha) = 0 .$$

*Dabei sei  $f(x, \alpha)$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$  an der Stelle  $(x, \alpha)$ . Dann gilt:*

$$\frac{dx}{d\alpha} = - \frac{\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x}}$$

**Beweisidee:** Wenn sich der Parameter  $\alpha$  verändert, dann wird sich auch die endogene Variable  $x$  verändern. Nehmen wir an, daß  $x$  eine differenzierbare Funktion  $x(\alpha)$  von  $\alpha$  ist. Dann können wir schreiben:

$$f(x(\alpha), \alpha) = 0$$

Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung nach  $\alpha$  total differenzieren, erhalten wir (Kettenregel!):

$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 .$$

Wenn  $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ , dann können wir nach  $\frac{dx}{d\alpha}$  auflösen und erhalten

$$\frac{dx}{d\alpha} = - \frac{\partial f(x, \alpha) / \partial \alpha}{\partial f(x, \alpha) / \partial x}$$

**Hausaufgabe:** Benutzen Sie Theorem 3.1 um in den beiden Beispielen  $\frac{dp^*}{dy}$  und  $\frac{dx^*}{dt}$  direkt auszurechnen. In Beispiel

2 sollten Sie auf  $\frac{dx^*}{dt} = -\frac{a-2bx^*}{(1-t)2b}$  kommen. Warum ist das dasselbe wie  $\frac{dx^*}{dt} = -\frac{c}{2b(1-t)^2}$ ?

Jetzt wenden wir Theorem 3.1 in den Beispielen 1 und 2 auf *allgemeine* Funktionen an.

**Beispiel 1:** Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$D(p, y) - S(p) = 0 .$$

Theorem 3.1 impliziert

$$\frac{dp^*}{dy} = -\frac{D_y}{D_p - S_p} .$$

Wenn wir wissen, daß  $D_p < 0$  und  $S_p > 0$  ist, dann ist der Nenner negativ und es gilt:

$$\frac{dp^*}{dy} \geq 0 \Leftrightarrow D_y \geq 0$$

Der Gleichgewichtspreis steigt also mit dem Einkommen genau dann, wenn die Nachfrage eine steigende Funktion des Einkommens ist, d.h., wenn es sich bei dem Gut um ein normales und kein inferiores Gut handelt.

**Beispiel 2:** Die inverse Nachfragefunktion  $P(x)$  des Lehrbuchverlages ist nicht notwendigerweise linear. Angenommen, wir wissen nur, daß  $P'(x) < 0$ . Die Bedingung erster



Ordnung für das Gewinnmaximierungsproblem des Monopolisten ist:

$$(1 - t)[P'(x)x + P(x)] - C'(x) = 0$$

Theorem 3.1 impliziert

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{-[P'(x)x + P(x)]}{(1 - t)[P''(x)x + 2P'(x)] - C''(x)} .$$

Was können wir über diesen Ausdruck sagen?

- Aus der Bedingung erster Ordnung wissen wir, daß

$$(1 - t)[P'(x)x + P(x)] = C'(x) .$$

Das impliziert

$$-[P'(x)x + P(x)] = -\frac{C'(x)}{1 - t} < 0$$

- Ausserdem wissen wir, daß die Gewinnfunktion am gewinnmaximalen Punkt konkav sein muß (Bedingung zweiter Ordnung), d.h., daß

$$\frac{d^2G}{dx^2} = (1 - t)[P''(x)x + 2P'(x)] - C''(x) < 0 .$$

Das ist aber genau der Nenner des obigen Ausdrucks.

Also gilt:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{-[P'(x)x + P(x)]}{(1 - t)[P''(x)x + 2P'(x)] - C''(x)} < 0 .$$

Wir können also festhalten, daß eine Erhöhung des Tantiemensatzes immer zu einer Verringerung der Ausbringungsmenge des Verlages führen wird, ganz gleich ob die Nachfragefunktion linear ist oder nicht.

## Beachten Sie:

1. Im ersten Beispiel ist die Funktion  $f(x, \alpha)$  eine Gleichgewichtsbedingung. Im zweiten Fall ist sie eine Bedingung erster Ordnung aus einem Maximierungsproblem. Obwohl das sehr unterschiedliche Probleme sind, ist das Verfahren in beiden Fällen dasselbe.
2. Wenn wir komparative Statik zu einem Maximierungsproblem betreiben, dann können wir die Bedingung zweiter Ordnung oft benutzen, um das Vorzeichen der betrachteten Veränderung zu bestimmen. Sei  $g(x, \alpha)$  die Zielfunktion eines Maximierungsproblems. Dann ist die Bedingung erster Ordnung für ein Maximum  $\frac{\partial g(x, \alpha)}{\partial x} = 0$ . Das entspricht der Funktion  $f(x, \alpha)$  in Theorem 3.1. Außerdem muß bei einem Maximum die Bedingung zweiter Ordnung erfüllt sein:  $\frac{\partial^2 g(x, \alpha)}{\partial x^2} < 0$ . Also ist  $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} < 0$ . Also muß gelten:

$$\text{sign} \left( \frac{dx}{d\alpha} \right) = \text{sign} \left( - \frac{\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x}} \right) = \text{sign} \left( \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right)$$

### 3.5 Das implizite Funktionentheorem bei mehreren endogenen Variablen

Wir betrachten jetzt den Fall, bei dem die Lösung unseres ökonomischen Problems durch  $n$  Gleichungen beschrieben wird, die von  $n$  endogenen und  $m$  exogenen Variablen abhängen.

$$\begin{aligned} f^1(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0 \\ f^2(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f^n(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0 \end{aligned}$$

#### Beispiele:

1. Ein allgemeines Gleichgewichtsmodell mit  $n + 1$  Märkten, das durch  $n$  Gleichgewichtsbedingungen beschrieben wird (warum nur  $n$ ?) Es gibt  $n$  endogene Variablen(welche?) und verschiedene exogene Parameter (z.B. verschiedene Steuersätze, mit denen die Transaktionen auf den verschiedenen Märkten besteuert werden). Die Frage lautet, wie sich die Gleichgewichtsallokation verändert, wenn sich die Parameter (z.B. die Steuern auf Arbeit, Kapital, Konsumgüter, etc.) ändern.
2. Ein Maximierungsproblem mit mehreren  $k$  Kontrollvariablen und  $l$  Nebenbedingungen in Gleichheitsform. Hier

gibt uns der Lagrange-Ansatz  $n = k + l$  Bedingungen erster Ordnung (die Ableitungen nach den Kontrollvariablen und nach den Lagrange-Parametern). Diese können wiederum von bestimmten exogenen Parametern abhängen.

**Theorem 3.2** *Wenn das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} f^1(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0 \\ f^2(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f^n(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) &= 0 \end{aligned}$$

*eine Lösung  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  hat, so daß die  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  differenzierbare Funktionen der exogenen Variablen  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sind, dann gilt:*

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{ij}|}{|F|}$$

*für  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  wobei  $|F| \neq 0$  und*

$$|F| = \begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 & \cdots & f_n^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & \cdots & f_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^n & f_2^n & \cdots & f_n^n \end{vmatrix}$$

*$|F_{ij}|$  wird gebildet, in dem die  $i$ te Spalte in  $|F|$  er-*

setzt wird durch die  $j$ te Spalte der  $n \times m$  Matrix

$$\begin{pmatrix} -f_{\alpha_1}^1 & -f_{\alpha_2}^1 & \cdots & -f_{\alpha_m}^1 \\ -f_{\alpha_1}^2 & -f_{\alpha_2}^2 & \cdots & -f_{\alpha_m}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -f_{\alpha_1}^n & -f_{\alpha_2}^n & \cdots & -f_{\alpha_m}^n \end{pmatrix}$$

**Beweisidee:** Betrachten Sie ein Gleichungssystem mit zwei endogenen und zwei exogenen Variablen:

$$\begin{aligned} f^1(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \\ f^2(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \end{aligned}$$

Wir nehmen an, daß eine Lösung  $(x_1^*(\alpha_1, \alpha_2), x_2^*(\alpha_1, \alpha_2))$  existiert, so daß die  $x_i^*(\alpha_1, \alpha_2)$  differenzierbare Funktionen von  $(\alpha_1, \alpha_2)$  sind. Also gilt:

$$\begin{aligned} f^1(x_1^*(\alpha_1, \alpha_2), x_2^*(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \\ f^2(x_1^*(\alpha_1, \alpha_2), x_2^*(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2) &= 0 \end{aligned}$$

Wir differenzieren beide Gleichungen (total) nach  $\alpha_1$  und erhalten:

$$\begin{aligned} f_1^1 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + f_2^1 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} + f_{\alpha_1}^1 &= 0 \\ f_1^2 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + f_2^2 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} + f_{\alpha_1}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem können wir in Matrizenform

schreiben:

$$\begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial x_1^* / \partial \alpha_1 \\ \partial x_2^* / \partial \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{\alpha_1}^1 \\ -f_{\alpha_1}^2 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat nur dann eine Lösung, wenn

$$|F| = \begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{vmatrix} = f_1^1 f_2^2 - f_1^2 f_2^1 \neq 0$$

Jetzt können wir Cramers Regel anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} &= |F_{11}| / |F| = \begin{vmatrix} -f_{\alpha_1}^1 & f_2^1 \\ -f_{\alpha_1}^2 & f_2^2 \end{vmatrix} / |F| = \frac{-f_{\alpha_1}^1 f_2^2 + f_{\alpha_1}^2 f_2^1}{|F|} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} &= |F_{21}| / |F| = \begin{vmatrix} f_1^1 & -f_{\alpha_1}^1 \\ f_1^2 & -f_{\alpha_1}^2 \end{vmatrix} / |F| = \frac{-f_1^1 f_{\alpha_1}^2 + f_1^2 f_{\alpha_1}^1}{|F|} \end{aligned}$$

## Zur Erinnerung: Cramers Regel

Betrachte ein lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Die Lösung für  $x_i$  ist gegeben durch

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|},$$

wobei  $\mathbf{A}_i$  die Matrix  $\mathbf{A}$  ist, in der die  $i$ te Spalte durch den Vektor  $\mathbf{b}$  ersetzt wurde.

### 3.6 Anwendung: Ein einfaches IS-LM Modell

Gütermarkt: In einer geschlossenen Volkswirtschaft müssen die Ersparnisse,  $S$ , gleich den Investitionen,  $I$ , sein.

- $S = S(Y, r)$ , Ersparnisse hängen ab vom Volkseinkommen,  $Y$ , und vom Zins,  $r$ ,  $S_Y > 0$ ,  $S_r > 0$ .
- $I = I(r)$ , Investitionen hängen ab vom Zins,  $I_r < 0$ .

Geldmarkt: Das Geldangebot,  $M$ , muß gleich der Geldnachfrage,  $L$ , sein.

- $M$  ist ein exogener Parameter, der von der Zentralbank gesetzt wird.
- $L = L(Y, r)$ , Geldnachfrage hängt vom Volkseinkommen und vom Zins ab,  $L_Y > 0$ ,  $L_r < 0$

Allgemeines Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} S(Y, r) - I(r) &= 0 \\ M - L(Y, r) &= 0 \end{aligned}$$

Zwei Gleichungen mit zwei endogenen Variablen  $(Y, r)$  und einer exogenen Variablen  $M$ .

**Komparative Statik:** Wie verändern sich Volkseinkommen und Zins, wenn sich die Geldmenge verändert?

$$F = \begin{pmatrix} S_Y & S_r - I_r \\ -L_Y & -L_r \end{pmatrix}$$

Beachten Sie, daß

$$|F| = -S_Y L_r + L_Y (S_r - I_r) > 0 .$$

Darum gilt nach Theorem 3.2:

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & S_r - I_r \\ -1 & -L_r \end{vmatrix}}{|F|} = \frac{0 + (S_r - I_r)}{|F|} > 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} S_Y & 0 \\ -L_Y & -1 \end{vmatrix}}{|F|} = \frac{-S_Y + 0}{|F|} < 0$$

Wir sehen also sofort, daß eine Erhöhung der Geldmenge im IS-LM Modell das Volkseinkommen erhöht und den Zins senkt. Beachten Sie, daß wir für dieses Resultat keine Annahmen an die funktionelle Form der verschiedenen Funktionen machen mußten. Wir haben lediglich Annahmen an die Vorzeichen der ersten Ableitungen dieser Funktionen gemacht.



### 3.7 Anwendung: Die Slutsky-Gleichung

Betrachten Sie das Nutzenmaximierungsproblem eines Konsumenten mit einer strikt quasikonkaven Nutzenfunktion:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$

unter der Nebenbedingung

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

Aus der Lagrangefunktion zu diesem Problem erhalten wir die folgenden Bedingungen erster Ordnung für ein Nutzenmaximum:

$$u_1(x_1, x_2) - \lambda p_1 = 0$$

$$u_2(x_1, x_2) - \lambda p_2 = 0$$

$$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

Das sind drei Gleichungen mit drei endogenen Variablen  $(x_1, x_2, \lambda)$  und drei exogenen Variablen  $(p_1, p_2, m)$ .

**Komparative Statik:** Wie verändern sich die Nachfrage nach Gut 1,  $x_1^*$ , wenn sich der Preis  $p_1$  und das Einkommen  $m$  verändern?

$$F = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Was wissen wir über das Vorzeichen von  $|F|$ ? Die Nutzenfunktion des Konsumenten ist strikt quasikonkav. Also muß gelten

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Beachten Sie, daß aus den Bedingungen erster Ordnung des Lagrange-Ansatzes folgt, daß  $u_1 = \lambda p_1$  und  $u_2 = \lambda p_2$ . Also gilt in der optimalen Lösung

$$\begin{aligned} |F| &= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^2}{\lambda^2} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \lambda p_1 \\ u_{21} & u_{22} & \lambda p_2 \\ \lambda p_1 & \lambda p_2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \end{aligned}$$

Anwendung von Theorem 3.2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} &= \frac{\begin{vmatrix} \lambda & u_{12} & -p_1 \\ 0 & u_{22} & -p_2 \\ x_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{|F|} \\ &= \frac{-\lambda(p_2)^2 + x_1(-p_2 u_{12} + p_1 u_{22})}{|F|} \\ &= \frac{-\lambda p_2^2}{|F|} - \frac{p_2 u_{12} - p_1 u_{22}}{|F|} x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_1^*}{\partial m} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_{12} & -p_1 \\ 0 & u_{22} & -p_2 \\ -1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{|F|} \\
 &= \frac{-(-p_2 u_{12} + p_1 u_{22})}{|F|} \\
 &= \frac{p_2 u_{12} - p_1 u_{22}}{|F|}
 \end{aligned}$$

Beide Vorzeichen sind unbestimmt, solange wir nicht mehr über die Nutzenfunktion wissen. Das ist auch ganz natürlich, denn

- Die Nachfrage nach einem Gut kann bei steigendem Preis fallen (gewöhnliches Gut) oder steigen (Giffen Gut)
- Die Nachfrage nach einem Gut kann bei steigendem Einkommen steigen (normales Gut) oder fallen (inferiores Gut).

Durch Einsetzen der zweiten in die erste Gleichung erhalten wir die **Slutzky Gleichung**:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = -\frac{\lambda p_2^2}{|F|} - \frac{\partial x_1}{\partial m} x_1$$

## Beachten Sie:

- Der erste Term auf der rechten Seite ist der Substitutionseffekt. Er ist immer negativ, d.h., eine Preiserhöhung führt durch den Substitutionseffekt tendenziell zu einer Nachfragesenkung.
- Der zweite Term ist der Einkommenseffekt. Wenn es sich um ein normales Gut handelt, d.h. wenn  $\partial x_1^* / \partial m > 0$ , dann ist der Einkommenseffekt ebenfalls negativ, d.h. eine Preiserhöhung führt zu einer Einkommensenkung, die die Nachfragesenkung verstärkt. Ein normales Gut kann also niemals ein Giffen Gut sein.
- Wenn es sich dagegen um ein inferiores Gut handelt, d.h. wenn  $\partial x_1^* / \partial m < 0$ , dann ist der Einkommenseffekt positiv, d.h. eine Preiserhöhung führt zu einer Einkommensenkung, die tendenziell zu einer Nachfrageerhöhung führt. In diesem Fall sind die beiden Effekte einander entgegengesetzt. Wenn der Einkommenseffekt den Substitutionseffekt betragsmäßig übertrifft, ist der Gesamteffekt positiv, d.h. eine Preiserhöhung führt zu einem Nachfrageanstieg (Giffen Gut).

## 3.8 Das Envelope Theorem

Betrachten Sie wieder ein Maximierungsproblem mit Nebenbedingungen. Bisher haben wir uns mit der Frage beschäftigt, wie sich die Veränderung eines exogenen Parameters auf die optimale Wahl der Kontrollvariablen auswirkt. Jetzt geht es um die Frage, wie sich die Veränderung eines exogenen Parameters auf den **Wert der Zielfunktion** auswirkt. Auch das ist in vielen Fällen eine wichtige ökonomische Frage.

### Beispiele:

- Wie verändert sich der Nutzen des Konsumenten, wenn sich der Preis  $p_i$  oder das Einkommen  $m$  verändern.
- Wie verändert sich der Gewinn eines Unternehmens, wenn sich der Zinssatz verändert.
- Wie verändern sich die Kosten eines Unternehmens, wenn sich ein Inputpreis verändert, etc.

Wir betrachten das folgende Maximierungsproblem mit einer Nebenbedingung in Gleichheitsform:

$$\max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n, \alpha)$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x_1, \dots, x_n, \alpha) = 0$$

Sei  $L = f(x_1, \dots, x_n, \alpha) - \lambda g(x_1, \dots, x_n, \alpha)$  die zugehörige Lagrangefunktion und sei  $(x_1^*(\alpha), \dots, x_n^*(\alpha), \lambda^*(\alpha))$  eine Lösung dieses Maximierungsproblems. Dann definieren wir

$$v(\alpha) = f(x_1^*(\alpha), \dots, x_n^*(\alpha), \alpha)$$

als den **Wert des Maximums** oder die **Wertfunktion** dieses Problems.

### Theorem 3.3 (Envelope Theorem)

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \alpha} = \frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

**Beweis:** Wenn wir den Wert des Maximums total nach  $\alpha$  differenzieren, erhalten wir

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\alpha} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Die Bedingungen erster Ordnung des Lagrange Ansatzes verlangen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned}$$

Also können wir schreiben:

$$\frac{dv}{d\alpha} = \lambda \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\alpha} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} \frac{dx_n}{d\alpha} \right) + \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

## Die Nebenbedingung

$$g(x_1^*(\alpha), \dots, x_n^*(\alpha), \alpha) = 0$$

muß für alle Werte von  $\alpha$  erfüllt sein. Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung total nach  $\alpha$  differenzieren, erhalten wir:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{dx_1^*}{d\alpha} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} \frac{dx_n^*}{d\alpha} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0$$

Wenn wir diese Beziehung einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \alpha} = \frac{\partial L}{\partial \alpha}.$$

*Q.E.D.*

## Interpretation:

1. Betrachten wir zunächst den einfacheren Fall eines Maximierungsproblems mit nur einer Kontrollvariablen ohne Nebenbedingung:

$$\max_x f(x, \alpha)$$

Hier sagt das Envelope Theorem einfach, daß die Ableitung der Wertfunktion nach  $\alpha$  gleich der partiellen Ableitung der Zielfunktion nach  $\alpha$  ist:

$$\frac{dv(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial f(x^*(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha}.$$

2. Warum ist das überraschend? Wenn sich  $\alpha$  ändert, dann hat das zwei Auswirkungen auf den Wert des Maximums:

- Einen direkten Einfluß durch  $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ .
- Einen indirekten Einfluß: Wenn sich der Parameter  $\alpha$  ändert, dann muß sich auch  $x^*(\alpha)$  ändern. Das beeinflußt den Wert der Zielfunktion durch  $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha}$ .

Das Envelope Theorem sagt jedoch, daß man diesen zweiten Effekt ignorieren kann, vorausgesetzt, man befindet sich in der Ausgangssituation an einem optimalen Wert von  $x$ .

3. Warum kann man den indirekten Effekt ignorieren? Wenn  $x^*(\alpha)$  in der Ausgangssituation optimal gewählt wurde, dann hat eine marginale Veränderung von  $x$  (fast) keinen Effekt auf den Wert der Zielfunktion, weil die Funktion an dieser Stelle (fast) vollständig flach verläuft. (Machen Sie sich das graphisch klar.)
4. Das Envelope Theorem gilt nur bei marginalen Veränderungen von  $\alpha$ . Bei einer großen Veränderung muß auch der indirekte Effekt berücksichtigt werden.
5. Wenn wir ein Maximierungsproblem mit Nebenbedingungen betrachten, dann sagt das Envelope Theorem einfach, daß die Veränderung des Wertes der Zielfunk-



tion bei einer Veränderung von  $\alpha$  gleich der partiellen Ableitung der Lagrangefunktion nach  $\alpha$  ist. Alle indirekten Effekte kann man wieder ignorieren.

6. Das Envelope Theorem vereinfacht viele Probleme ganz erheblich: Wenn man wissen möchte, wie sich z.B. die Kosten eines Unternehmens bei der marginalen Veränderung eines Inputpreises verändern, genügt es, sich die unmittelbare Auswirkung dieser Veränderung anzuschauen. Man muß nicht berücksichtigen, daß diese Veränderung auch zu einer veränderten Inputnachfrage führt.

Das Envelope Theorem wird auch **Umhüllendensatz** genannt, weil die Funktion  $v(\alpha)$  die Funktionen  $f(\bar{x}, \alpha)$  für alle  $\bar{x} \in IR$  umhüllen muß:



Figur 4.1: Das Envelope Theorem

### 3.9 Anwendung: Die Gewinnfunktion

Betrachten Sie ein Unternehmen, daß seinen Gewinn bei gegebenen Output- und Faktorpreisen maximiert (vollkommene Konkurrenz):

$$\max_{y,A,K} py - wA - rK$$

unter der Nebenbedingung

$$y = f(A, K) .$$

Dabei ist  $A$  der Arbeitseinsatz,  $K$  der Kapitaleinsatz,  $w$  der Lohn,  $r$  der Zins,  $y$  die Outputmenge und  $f(A, K)$  die Produktionsfunktion.

Die Lagrangefunktion zu diesem Problem lautet:

$$L = py - wA - rK - \lambda[y - f(A, K)]$$

Wir nehmen an, daß die Bedingungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}p - \lambda &= 0 \\ \lambda f_A(A, K) - w &= 0 \\ \lambda f_K(A, K) - r &= 0 \\ -y + f(A, K) &= 0\end{aligned}$$

notwendig und hinreichend für die optimale Lösung sind.

Daraus können wir die optimale Produktionsmenge  $y^*(p, w, r)$  und die optimalen Faktoreinsatzmengen  $A^*(p, w, r)$  und  $K^*(p, w, r)$  ableiten und erhalten dann die Gewinnfunktion:

$$G(p, w, r) = py^*(p, w, r) - wA^*(p, w, r) - rK^*(p, w, r)$$

Das ist die Wertfunktion unseres Problems. Die Frage ist, wie sich der (maximal erreichbare) Gewinn verändert, wenn sich die exogenen Parameter  $p$ ,  $w$  und  $r$  verändern. Aus dem Envelope Theorem folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial p} &= \frac{\partial L}{\partial p} = y^*(p, w, r) \\ \frac{\partial G}{\partial w} &= \frac{\partial L}{\partial w} = -A^*(p, w, r) \\ \frac{\partial G}{\partial r} &= \frac{\partial L}{\partial r} = -K^*(p, w, r)\end{aligned}$$

## Interpretation:

1. Wenn sich der Outputpreis um eine (marginale) Einheit erhöht, dann steigt der Gewinn um  $1 \cdot y^*(p, w, r)$  Einheiten. Wir müssen bei einer marginalen Preiserhöhung also nicht berücksichtigen, daß die Erhöhung des Outputpreises auch zu einer Veränderung der Outputmenge führt.
2. Wenn sich der Lohnsatz um eine Einheit erhöht, dann fällt der Gewinn um  $1 \cdot L^*(p, w, r)$  Einheiten. Wir müssen bei einer marginalen Lohnerhöhung also nicht berücksichtigen, daß die Erhöhung des Lohnsatzes zu einer Substitution von Arbeit durch Kapital führt.
3. Wenn sich der Zins um eine Einheit erhöht, dann fällt der Gewinn um  $1 \cdot K^*(p, w, r)$  Einheiten. Wir müssen bei einer marginalen Zinserhöhung also nicht berücksichtigen, daß die Erhöhung des Zinssatzes zu einer Substitution von Kapital durch Arbeit führt.

Dieses Resultat wird auch **Hotellings Lemma** genannt, daß uns im nächsten Kapitel wieder begegnen wird.