

## 2 Maximierung mit Nebenbedingungen

### Literatur:

- Hoy et.al. (2001), Chapter 13.
- Gravelle und Rees (1992), Chapter 2 F,G und 15 A,B.
- Chiang (1984), Chapter 12.
- Binmore (1983), Chapter 3.

### 2.1 Beispiel: Das Bodenallokationsproblem des Bauern

Ein Landwirt hat 12 Hektar Land, auf dem er Getreide oder Gemüse anbauen kann. Sei

$x_1$  Hektar Land für Getreideproduktion

$x_2$  Hektar Land für Gemüseproduktion

$G_1(x_1)$  Gewinn aus Getreideproduktion,  $G_1(x_1) = 8x_1$

$G_2(x_2)$  Gewinn aus Gemüseproduktion,  $G_2(x_2) = 32\sqrt{x_2}$

Sein Gewinnmaximierungsproblem lautet:

$$\max_{x_1, x_2} 8x_1 + 32\sqrt{x_2}$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 \leq 12 .$$

Da der Grenzgewinn aus dem Gemüse- und dem Getreideanbau immer positiv ist, kann es nicht optimal sein, Land brach liegen zu lassen. Also muß die Nebenbedingung mit Gleichheit erfüllt sein.

## Das Lagrange-Verfahren:

### 1. Aufstellen der Lagrangefunktion:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 8x_1 + 32\sqrt{x_2} - \lambda(x_1 + x_2 - 12)$$

Die Lagrange-Funktion ist also einfach die ursprüngliche Zielfunktion abzüglich eines Produkts. Dieses Produkt setzt sich zusammen aus

- dem sog. Lagrange Parameter  $\lambda$  und
- der linken Seite der Nebenbedingung, die so aufgelöst wurde, daß alle Terme auf der linken Seite stehen und zusammen gleich 0 sind.

Beachten Sie: Wenn die Nebenbedingung mit Gleichheit erfüllt ist, muß der zweite Term dieses Produkts gleich 0 sein.

### 2. Partielle Ableitungen bilden und gleich 0 setzen:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 8 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 16\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1 - x_2 + 12 = 0$$

### 3. Auflösen dieses Gleichungssystems nach den drei Unbekannten $x_1$ , $x_2$ und $\lambda$ :

$$\lambda = 8$$

$$x_2 = 4$$

$$x_1 = 8$$

4. Eigentlich müssen wir jetzt überprüfen, ob die Lagrangebedingungen auch hinreichend für die optimale Lösung sind. Siehe unten.

### Interpretation:

- Der Landwirt wird den Gemüseanbau solange ausdehnen, bis der Grenzertrag einer Einheit Land beim Gemüseanbau genau so groß ist wie der Grenzertrag einer Einheit Land beim Getreideanbau. Zeigen Sie rechnerisch, daß diese Aussage stimmt.
- Man kann das auch sofort an den beiden ersten Lagrangebedingungen erkennen, wenn man dort jeweils  $\lambda$  auf die rechte Seite bringt und dann beide Gleichungen durcheinander dividiert:

$$\frac{8}{\frac{16}{\sqrt{x_2}}} = \frac{G'_1(x_1)}{G'_2(x_2)} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

- Der Lagrangeparameter  $\lambda$  ist genau so groß wie der Grenzgewinn aus einem zusätzlichen Hektar Land (egal ob in der Getreide- oder Gemüseverwendung). Man sagt auch, daß der Lagrangeparameter ein “Schattenpreis” ist, in diesem Beispiel für den knappen Boden. Er gibt an, wieviel der Landwirt für einen zusätzlichen Hektar Land maximal zu zahlen bereit wäre.

## 2.2 Das Lagrange-Verfahren

Der Lagrange-Ansatz wird in allen Gebieten der Ökonomie sehr häufig verwendet. Darum soll er hier etwas ausführlicher und allgemeiner beschrieben werden. Betrachten wir zunächst ein Maximierungsproblem

mit nur **einer Nebenbedingung in Gleichungsform** ohne Nicht-Negativitäts-Bedingungen.

$$\max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n)$$

u.d.NB.

$$g(x_1, \dots, x_n) = b$$

Die Lagrange-Funktion für dieses Problem lautet:

$$L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda [g(x_1, \dots, x_n) - b]$$

Zur Vereinfachung der Notation sei  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Außerdem bezeichnen wir mit  $f_i$  die partielle Ableitung der Funktion  $f(x)$  nach  $x_i$ .

**Theorem 2.1 (Lagrange)** *Wenn der Vektor  $x^*$  die Funktion  $f(x)$  unter der Nebenbedingung  $g(x) = b$  maximiert, und wenn  $g_i(x^*) \neq 0$  für wenigstens ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dann existiert eine reelle Zahl  $\lambda^*$ , so daß*

$$L_i(x^*, \lambda^*) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

und

$$L_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0$$

### Bemerkungen:

1. Die Bedingung " $g_i(x^*) \neq 0$  für wenigstens ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ " ist die sog. "Constraint Qualification", die man normalerweise einfach ignorieren kann. Wenn jedoch irgendetwas schief läuft und man kein oder ein sehr unplausibles Ergebnis bekommt, sollte man diese Bedingung überprüfen.

2. Das Theorem von Lagrange besagt nur, daß die Bedingungen an die ersten Ableitungen der Lagrange-Funktion **notwendige Bedingungen** für eine Lösung des Maximierungsproblems sind, d.h., jede Lösung muß diese Bedingungen erfüllen.
3. Die Lagrange-Bedingungen werden auch “**Bedingungen erster Ordnung**” genannt. Es gibt  $(N+1)$  solcher Bedingungen mit  $(N+1)$  Unbekannten, nämlich den Werten  $x_1^*, \dots, x_n^*$  und  $\lambda$ . Wenn dieses Gleichungssystem eine Lösung hat, dann erhält man einen (eventuell auch mehrere) Kandidaten für die Lösung des Maximierungsproblems. Bei diesem Kandidaten kann es sich jedoch auch um ein Minimum oder um ein lokales (und nicht globales) Maximum handeln. Darum ist das folgende Theorem sehr nützlich:

**Theorem 2.2** *Die Lagrange-Bedingungen sind nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für eine (eindeutige) optimale Lösung,*

- *wenn die Menge, über die maximiert wird, konvex ist und*
- *wenn die Zielfunktion  $f(x)$  global (streng) quasikonkav ist.*

Bei vielen einfachen Optimierungsproblemen ist die Menge, über die maximiert wird, eine Gerade (Budgetgerade beim Nutzenmaximierungsproblem,  $x_1 + x_2 = 12$  beim Bodenallokationsproblem, etc.) Eine Gerade ist immer eine konvexe Menge. In diesem Fall gibt es also kein Problem.

Bei komplizierteren Optimierungsproblemen muß man überprüfen, ob die Nebenbedingungen eine konvexe Menge einschließen.

Es bleibt zu klären, wann eine Funktion **streng quasikonkav** ist.

## 2.3 Quasikonkave Funktionen

Wir wissen bereits aus Kapitel 1, daß die Bedingungen erster Ordnung die optimale Lösung eindeutig charakterisieren, wenn die Zielfunktion **streng konkav** ist. Die Forderung nach strenger Konkavität ist jedoch etwas zu stark. Es genügt, daß die Funktion **streng quasikonkav** ist.

**Definition 2.3 (Quasikonkavität)** *Eine Funktion  $f(x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  ist (streng) quasikonkav genau dann, wenn für alle  $k \in (0, 1)$  und alle  $x', x'' \in \mathbb{R}^N$  gilt:*

$$f(x') \geq f(x'') \Rightarrow f(kx' + (1 - k)x'') \geq (>) f(x'')$$

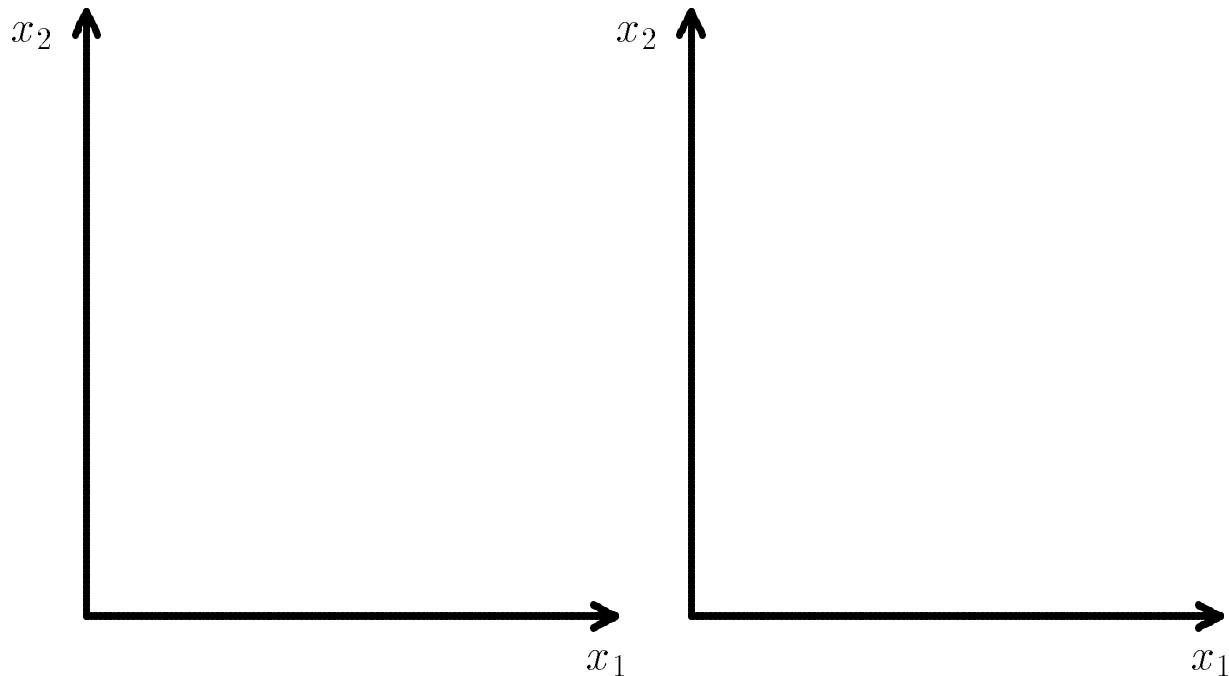
### Interpretation:

Diese Bedingung impliziert

$$f(x') = f(x'') \Rightarrow f(kx' + (1 - k)x'') \geq (>) f(x'')$$

für alle  $k \in (0, 1)$ . Hier sind  $x'$  und  $x''$  zwei Punkte, die auf einer Konturlinie ("Höhenlinie", z.B. Indifferenzkurve, Isogewinnkurve) von  $f(x)$  liegen. Eine konvexe Kombination von  $x'$  und  $x''$  führt also zu einem höheren Funktionswert.

$\Rightarrow$  Die oberen Konturmengen einer quasikonkaven Funktion sind konvex.



Figur 2.1: Konturlinien einer quasikonkaven Funktion

### Bemerkungen:

1. Wenn ein Konsument konvexe Präferenzen hat, dann bedeutet das genau, daß die oberen Konturmengen seiner Nutzenfunktion konvex sind. Also hat ein Konsument mit konvexen Präferenzen eine quasikonkave Nutzenfunktion!
2. Jede konkave Funktion ist auch quasikonkav.

Beweis: Eine Funktion  $f(x)$  ist konkav, wenn gilt:

$$f(kx' + (1 - k)x'') \geq kf(x') + (1 - k)f(x'')$$

Wähle  $x'$  und  $x''$  so, daß  $f(x') \geq f(x'')$ . Dann gilt:

$$f(kx' + (1 - k)x'') \geq kf(x') + (1 - k)f(x'') \geq f(x'')$$

Also ist diese Funktion auch quasikonkav.

3. Aber: Nicht jede quasikonkave Funktion ist auch konkav.

Beispiele:

- Bei Funktionen mit einer Veränderlichen ist jede monotone Funktion quasikonkav, aber nicht jede monotone Funktion ist konkav.
  - Eine Glockenkurve ist quasikonkav aber nicht konkav.
4. Die Eigenschaft der Quasikonkavität bleibt bei einer monotonen Transformation der Funktion erhalten (Nutzenfunktionen!). Das gilt nicht für die Eigenschaft der Konkavität.

### Wie überprüft man, ob eine differenzierbare Funktion streng quasikonkav ist?

- Man bildet die Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen dieser Funktion und “rändert” sie mit den 1. Ableitungen:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} & f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} & f_n \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Funktion ist **streng quasikonkav**, wenn die Vorzeichen der geränderten Hauptminoren abwechselnd streng negativ und streng positiv sind:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_1 \\ f_1 & 0 \end{vmatrix} < 0, \quad (-1)^m \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} & f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mm} & f_m \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_m & 0 \end{vmatrix} > 0$$



für alle  $2 \leq m \leq n$ .

- Die Funktion ist **quasikonkav**, wenn die Vorzeichen der geränderten Hauptminoren dieser Matrix abwechselnd nicht-positiv und nicht-negativ sind (schwache Ungleichheitszeichen).

**Beispiel:** Ist die Zielfunktion des Landwirts  $f(x_1, x_2) = 8x_1 + 32\sqrt{x_2}$  streng quasikonkav?

Die ersten und zweiten partiellen Ableitungen dieser Funktion sind:

$$f_1 = 8, \quad f_2 = 16x_2^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_{11} = 0, \quad f_{22} = -8x_2^{-\frac{3}{2}}, \quad f_{12} = f_{21} = 0$$

Also gilt:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_1 \\ f_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 64 < 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & -8x_2^{-\frac{3}{2}} & 16x_2^{-\frac{1}{2}} \\ 8 & 16x_2^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 + 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ -8x_2^{-\frac{3}{2}} & 16x_2^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot 8 \cdot 8x_2^{-\frac{3}{2}} > 0.$$

Also ist die Zielfunktion quasikonkav und wir können sicher sein, daß die Lösung, die wir oben gefunden haben auch tatsächlich das globale Maximum beschreibt.

Es ist manchmal etwas aufwendig, zu überprüfen, ob man tatsächlich ein globales Maximum gefunden hat. Darum werden wir Sie in Übungsauf-

gaben explizit auffordern, diese Überprüfung vorzunehmen. Ansonsten können Sie darauf verzichten.

## 2.4 Anwendung: Intertemporale Konsumentscheidungen

Ein Konsument erzielt Einkommen in mehreren Perioden und will seinen Konsum über mehrere Perioden aufteilen.

Einfachster Fall:

- 2 Perioden,  $t = 1, 2$ ;
- Einkommen des Konsumenten in Periode  $t$  ist  $m_t$ ;  
 $(m_1, m_2)$  = Einkommens-Ausstattung.
- Ein (zusammengesetztes) Gut in jeder Periode, Konsumplan  $(x_1, x_2)$ ;
- Preis des Gutes in beiden Perioden derselbe, normiert auf 1;

Die Präferenzen des Konsumenten können durch Indifferenzkurven im  $(x_1, x_2)$ -Raum dargestellt werden. Hier ist es sehr natürlich anzunehmen, daß die Präferenzen

- **monoton** und
- **konvex**

sind und daß der Konsument in beiden Perioden konsumieren will (**innere Lösung**).

Nehmen wir an, daß der Konsument einen Kredit zum Zinssatz  $r$  aufnehmen und Ersparnisse zum Zinssatz  $r$  anlegen kann (**perfekter Kapitalmarkt**).

Sei  $A$  der Betrag, den der Konsument in Periode 1 ausleiht. Wenn  $A$  negativ ist, spart der Konsument. Bei monotonen Präferenzen muß gelten:

$$x_1 = m_1 + A$$

$$x_2 = m_2 - (1 + r)A$$

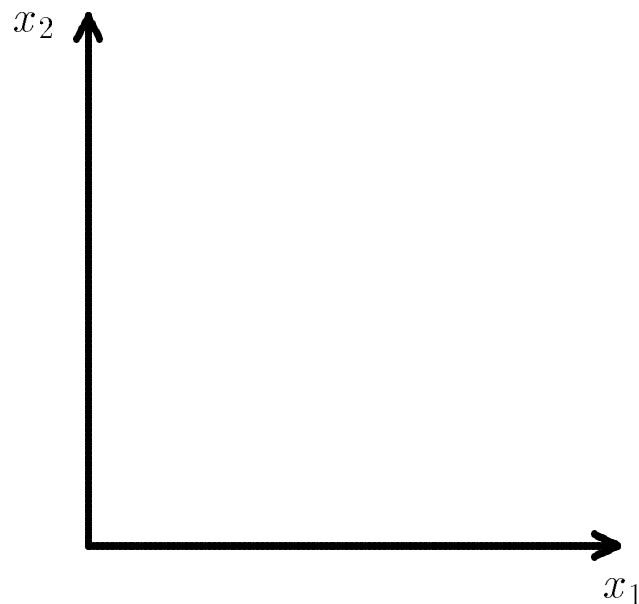
Auflösen nach  $A$  in der ersten Gleichung und einsetzen in die zweite ergibt:

$$x_2 = m_2 - (1 + r)(x_1 - m_1)$$

bzw.

$$x_1 + \frac{x_2}{1 + r} = m_1 + \frac{m_2}{1 + r} \equiv M$$

wobei  $M$  der **Barwert des Vermögens** des Konsumenten ist.



Figur 3.1: Budgetbeschränkung auf einem perfekten Kapitalmarkt

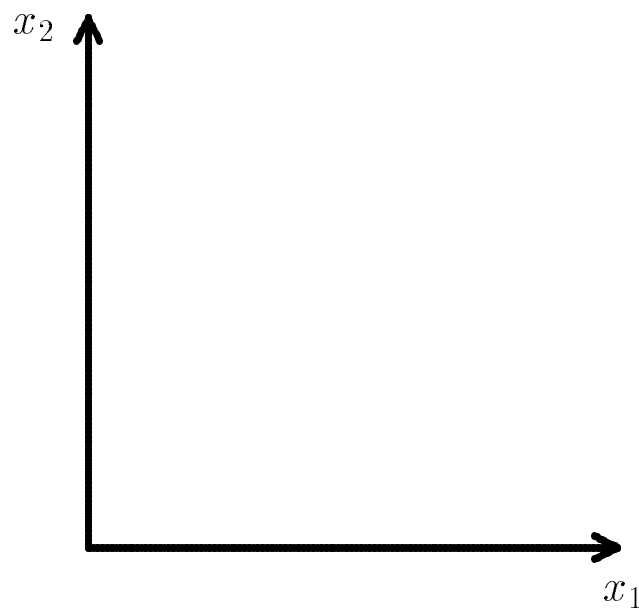
Wie sieht die Budgetbeschränkung aus, wenn der Konsument

- weder sparen noch einen Kredit aufnehmen kann,

- nur zinslos sparen, aber keinen Kredit aufnehmen kann,
- zum Habenzinssatz  $r_h$  sparen und zum Sollzinssatz  $r_s$  Geld anlegen kann ( $r_h < r_s$ )?

Beachten Sie, daß der Punkt  $(m_1, m_2)$  in allen diesen Fällen in der Budgetmenge liegen muß.

Welchen Konsumplan wird der Konsument wählen?



Figur 2.2: Der optimale Konsumplan

**Beachten Sie:**

- Der optimale Konsumplan ist dadurch charakterisiert, daß die höchste erreichbare Indifferenzkurve die Budgetgerade tangiert.
- Die Steigung der Indifferenzkurve ist die Grenzrate der Substitution, die angibt, in welchem Verhältnis der Konsument bereit ist, "Konsum heute" gegen "Konsum morgen" auszutauschen.

- Die Steigung der Budgetgeraden gibt an, in welchem Verhältnis der Konsument “Konsum heute” gegen “Konsum morgen” austauschen kann.
- Im Optimum müssen diese beiden Verhältnisse übereinstimmen. Warum?

## Analytische Bestimmung des optimalen Konsumplans

Angenommen, die Präferenzen des Konsumenten werden durch die Nutzenfunktion  $u(x_1, x_2)$  repräsentiert. Dann lautet das Nutzenmaximierungsproblem des Konsumenten:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$

unter der Nebenbedingung:

$$x_1 + \frac{x_2}{1+r} = m_1 + \frac{m_2}{1+r}$$

1. Aufstellen der Lagrange-Funktion:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) - \lambda \cdot \left( x_1 - m_1 + \frac{x_2 - m_2}{1+r} \right)$$

2. Partielle Ableitungen bilden und gleich 0 setzen:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda \frac{1}{1+r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1 + m_1 - \frac{x_2 - m_2}{1+r} = 0$$

3. Jetzt haben Sie drei Gleichungen, die Sie nach den drei Unbekannten  $(x_1, x_2, \lambda)$  auflösen können.

4. Schließlich müssen Sie noch überprüfen, ob die Lagrangebedingungen auch hinreichend für die optimale Lösung sind.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt sofort, daß

$$\frac{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = 1 + r$$

Das ist die Bedingung, daß im Nutzenmaximum der Betrag der Grenzrate der Substitution gleich dem Preisverhältnis für gegenwärtigen und zukünftigen Konsum sein muß.

**Beispiel:** Betrachte die Nutzenfunktion

$$u(x_1, x_2) = u(x_1) + \delta u(x_2)$$

Diese Form einer additiv separablen Nutzenfunktion wird bei intertemporalen Konsumentscheidungen sehr häufig verwendet. Hier sind die Präferenzen des Konsumenten in jeder Periode dieselben, aber er diskontiert den zukünftigen Nutzen mit einem Diskontierungsfaktor  $\delta < 1$  (sprich: Delta).

Um den optimalen Konsumplan konkret ausrechnen zu können, müssen wir noch etwas spezifischer sein. Wir nehmen an, daß  $u(x) = \ln x$ , d.h.,

$$u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \delta \ln x_2$$

Nutzenmaximierungsproblem:

$$\max_{x_1, x_2} \ln x_1 + \delta \ln x_2$$

unter der Nebenbedingung:

$$x_1 + \frac{x_2}{1+r} = m_1 + \frac{m_2}{1+r}$$

Die Lagrangefunktion lautet:

$$L = \ln x_1 + \delta \ln x_2 - \lambda \left[ x_1 - m_1 + \frac{x_2 - m_2}{1 + r} \right]$$

Ableiten nach  $x_1$ ,  $x_2$  und  $\lambda$  ergibt:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\delta}{x_2} - \frac{\lambda}{1 + r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1 + m_1 - \frac{x_2 - m_2}{1 + r} = 0$$

Wenn wir bei den beiden ersten Bedingungen die negativen Terme auf die andere Seite bringen und dann die beiden Gleichungen durcheinander teilen, erhalten wir:

$$\frac{x_2}{\delta x_1} = 1 + r$$

Auf der linken Seite steht das Verhältnis der Grenznutzen, was nichts anderes ist als die Grenzrate der Substitution. Auf der rechten Seite steht das Preisverhältnis von "Konsum heute" zu "Konsum morgen".

Auflösen nach  $x_1$  ergibt:

$$x_1 = \frac{x_2}{\delta(1 + r)}$$

Einsetzen in die dritte Bedingung und Auflösen nach  $x_2$  ergibt:

$$x_2^* = \frac{\delta(1 + r)}{1 + \delta} \left( m_1 + \frac{m_2}{1 + r} \right)$$

Wenn wir  $x_2$  in den Ausdruck für  $x_1$  einsetzen, erhalten wir:

$$x_1^* = \frac{1}{1 + \delta} \left( m_1 + \frac{m_2}{1 + r} \right)$$

**Beachten Sie:**

1. Der optimale Konsumpfad ist völlig unabhängig davon, wie die Verteilung des Einkommens über die Zeit aussieht, solange der Barwert des Vermögens derselbe ist.
2. Wenn der Konsument zukünftigen Konsum mit dem Marktzinssatz abdiskontiert, d.h., wenn  $\delta = \frac{1}{1+r}$ , dann gilt  $x_1^* = x_2^*$ .
3. Wenn der Konsument dagegen eine höhere Zeitpräferenzrate hat als der Marktzins, d.h., wenn  $\delta < \frac{1}{1+r}$ , dann gilt  $x_1^* > x_2^*$ , d.h., der Konsument möchte in der Gegenwart etwas mehr konsumieren als in der Zukunft.
4. Wenn umgekehrt  $\delta > \frac{1}{1+r}$ , dann gilt  $x_1^* < x_2^*$ , d.h., der Konsument möchte in der Gegenwart etwas weniger konsumieren als in der Zukunft.

Schließlich müssen wir prüfen, ob die Lagrange Bedingungen auch hinreichend für eine optimale Lösung sind. Das ist der Fall, wenn die Nutzenfunktion  $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \delta \ln x_2$  streng quasikonkav ist.

Die ersten und zweiten partiellen Ableitungen dieser Funktion sind:

$$f_1 = \frac{1}{x_1}, \quad f_2 = \frac{\delta}{x_2}$$

$$f_{11} = -\frac{1}{x_1^2}, \quad f_{22} = -\frac{\delta}{x_2^2}, \quad f_{12} = f_{21} = 0$$

Also gilt:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_1 \\ f_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_1} & 0 \end{vmatrix} = 0 - \frac{1}{x_1^2} < 0,$$



$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & 0 & \frac{1}{x_1} \\ 0 & -\frac{\delta}{x_2^2} & \frac{\delta}{x_2} \\ \frac{1}{x_1} & \frac{\delta}{x_2} & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{x_1^2} \begin{vmatrix} -\frac{\delta}{x_2^2} & \frac{\delta}{x_2} \\ \frac{\delta}{x_2} & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \frac{\delta}{x_2} \\ \frac{1}{x_1} & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{x_1} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\delta}{x_2^2} \\ \frac{1}{x_1} & \frac{\delta}{x_2} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{x_1^2} \frac{\delta^2}{x_2^2} - 0 + \frac{1}{x_1^2} \frac{\delta}{x_2} \\
&= \frac{\delta}{x_1^2 x_2^2} (1 - \delta) > 0.
\end{aligned}$$

## 2.5 Interpretation des Lagrange Parameters

Lagrange Parameter sind nicht nur ein sehr nützliches mathematisches Hilfsmittel, sie haben auch eine wichtige ökonomische Interpretation:

Der Lagrange Parameter gibt an, um welchen Betrag sich der Wert der Zielfunktion ändert, wenn die Nebenbedingung um eine Einheit gelockert wird.

Beispiele:

1. Landwirt maximiert seinen Gewinn unter einer Bodenbeschränkung.  
 $\Rightarrow \lambda^*$  gibt an, um wieviel der Gewinn des Landwirtes steigen würde, wenn er eine zusätzliche Einheit Boden zur Verfügung hätte.
2. Konsument maximiert seinen Nutzen unter einer Budgetbeschränkung.  
 $\Rightarrow \lambda^*$  gibt an, um wieviel der Nutzen des Konsumenten steigt, wenn er eine zusätzliche Geldeinheit Budget zur Verfügung hat.

3. Unternehmen maximiert seinen Gewinn unter einer Input- Restriktion.

$\Rightarrow \lambda^*$  gibt an, um wieviel der Gewinn des Unternehmens steigt, wenn es eine zusätzliche Inputeinheit zur Verfügung hat.

4. Unternehmen minimiert seine Kosten unter der Nebenbedingung, daß es eine bestimmte Menge Output produzieren muß.

$\Rightarrow \lambda^*$  gibt an, um wieviel die Kosten sinken, wenn eine Outputeinheit weniger produziert werden muß.

Um diese Interpretation zu sehen, betrachten Sie das folgende Maximierungsproblem:

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$$

u.d. Nebenbedingung

$$g(x_1, x_2) = b$$

Die Lösung dieses Problems hängt von dem Parameter  $b$  ab:

$$x_1^* = x_1^*(b), \quad x_2^* = x_2^*(b) .$$

Sei

$$v^*(b) = f(x_1^*(b), x_2^*(b))$$

der Wert der Zielfunktion an der optimalen Lösung. Da  $x_1^*$  und  $x_2^*$  von  $b$  abhängen, gilt das offensichtlich auch für  $v^*$ . Die Frage ist: Wie verändert sich  $v^*(b)$ , wenn sich  $b$  verändert?

$$\frac{dv^*}{db} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1^*}{db} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2^*}{db} = f_1 \frac{dx_1^*}{db} + f_2 \frac{dx_2^*}{db}$$

Die Lagrange Bedingungen 1. Ordnung verlangen:

$$L_1(x^*, \lambda^*) = 0 \Rightarrow f_1 = \lambda^* g_1$$

$$L_2(x^*, \lambda^*) = 0 \Rightarrow f_2 = \lambda^* g_2$$

Also muß gelten:

$$\frac{dv^*}{db} = \lambda^* \left( g_1 \frac{dx_1^*}{db} + g_2 \frac{dx_2^*}{db} \right) .$$

Schließlich muß die Nebenbedingung mit Gleichheit erfüllt sein:

$$g(x_1^*(b), x_2^*(b)) = b .$$

Wenn wir diese Gleichung total nach  $b$  differenzieren, erhalten wir

$$\frac{dg}{db} = g_1 \frac{dx_1^*}{db} + g_2 \frac{dx_2^*}{db} = 1$$

Einsetzen in die obige Gleichung ergibt:

$$\frac{dv^*}{db} = 1 \cdot \lambda^* = \lambda^* .$$

Der Wert des Lagrange Parameters gibt also an, wie sich der Wert der Zielfunktion marginal verändert, wenn sich die Nebenbedingung marginal ändert.

## 2.6 Lagrange mit Nicht-Negativitätsbeschränkungen

Bisher haben wir das Problem von Randlösungen ignoriert. In vielen ökonomischen Problemen gibt es aber natürliche Nicht-Negativitäts-Beschränkungen (NNB). Zum Beispiel können Konsum- oder Produktionsmengen nicht negativ werden. In diesem Fall lautet unser Maximierungsproblem:

$$\max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n)$$

u.d.NB:

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &= b \\ x_i &\geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

**Bemerkungen:**

1. Die NNB können sich natürlich auch nur auf eine Teilmenge der  $x_i$  beziehen.
2. Das einfachste Vorgehen ist wie folgt:
  - Ignorieren Sie die NNB und verwenden Sie den normalen Lagrange-Ansatz ohne NNB.
  - Wenn die Lösung des unbeschränkten Problems die NNB erfüllt, ist alles in Ordnung.
  - Wenn eine oder mehrere NNB verletzt sind, können Sie das folgende Theorem von Lagrange verwenden:

**Theorem 2.4 (Lagrange mit NNB)** *Wenn der Vektor  $x^*$  die Funktion  $f(x)$  unter der Nebenbedingung  $g(x) = b$  und  $x_i \geq 0$  maximiert, und wenn  $g_i(x^*) \neq 0$  für wenigstens ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dann existiert eine reelle Zahl  $\lambda^*$ , so daß für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$*

$$L_i(x^*, \lambda^*) \leq 0, \quad x_i^* \geq 0, \quad x_i^* L_i(x^*, \lambda^*) = 0,$$

und

$$L_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0$$

**Bemerkungen:**

1. Die Bedingung " $x_i^* L_i(x^*, \lambda^*) = 0$ " wird auch "komplementäre Slackness" (komplementärer Schlupf) genannt:
  - Entweder die NNB bindet nicht ( $x_i^* > 0$ ). In diesem Fall muß die Ableitung der Lagrangefunktion nach  $x_i$  gleich 0 sein.

- Oder die NNB bindet ( $x_i^* = 0$ ). Dann muß die Ableitung der Lagrangefunktion nicht-positiv (negativ oder null) sein: Der Wert der Zielfunktion verringert sich, wenn man  $x_i$  von 0 weg erhöht.
2. Vorgehensweise: Man versucht wieder, Kandidaten für eine Lösung zu finden, d.h. Vektoren  $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ , die die Lagrange-Bedingungen erfüllen. Das ist jetzt deutlich aufwendiger, weil viele Fälle unterschieden werden müssen. Ein bißchen Nachdenken über das zugrunde liegende ökonomische Problem ermöglicht es oft, zu ahnen, welche NNB binden werden und welche nicht.
  3. Theorem 2.2 über hinreichende Bedingungen für eine eindeutige, global optimale Lösung gilt weiterhin.

## 2.7 Anwendung: Kostenminimierung bei substituierbarer Produktionsfunktion

Ein Unternehmen hat die Produktionsfunktion

$$f(l, k) = l + 2k .$$

Der Preis für eine Arbeitsstunde ist  $p_l = 4$ , der Preis für Kapital  $p_k = 10$ . Das Unternehmen möchte einen gegebenen Output von mindestens 20 Einheiten mit minimalen Kosten produzieren.

$$\min_{l, k} 4l + 10k$$

unter der Nebenbedingung

$$l + 2k = 20$$

und den Nicht-Negativitäts-Bedingungen

$$l \geq 0, \quad k \geq 0$$

Lagrangeansatz (ignorieren der NNB):

$$\max_{l,k} -4l - 10k - \lambda[20 - l - 2k]$$

Bedingungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial L}{\partial l} = -4 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = -10 + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -20 + l + 2k = 0$$

Auflösen der beiden ersten Gleichungen ergibt:

$$\frac{4}{10} = \frac{1}{2}$$

Das ist Unsinn!

Hier muß eine NNB binden. Es können nicht beide gleichzeitig binden, sonst wäre der Output 0. Also gibt es nur zwei Möglichkeiten:

1. Im Optimum gilt  $l = 0$  und  $k > 0$ : Lagangebedingungen (mit NNB):

$$\frac{\partial L}{\partial l} = -4 + \lambda \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = -10 + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -20 + l + 2k = 0$$

Beachten Sie, daß wir hier die komplementären Slackness Bedingungen schon verwendet haben. Aus der zweiten Gleichung folgt  $\lambda^* = 5$ . Einsetzen in die erste Bedingung führt dazu, daß diese dann verletzt ist. Also kann das nicht die Lösung sein.

2. Im Optimum gilt  $l > 0$  und  $k = 0$ : Lagangebedingungen (mit NNB):

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial l} &= -4 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial k} &= -10 + 2\lambda \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -20 + l + 2k = 0\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt  $\lambda^* = 4$ . Das ist kompatibel mit der zweiten Bedingung. Einsetzen von  $k = 0$  in die dritte Bedingung ergibt  $l^* = 20$ .

Also erfüllt der Vektor  $(l^*, k^*, \lambda^*) = (20, 0, 4)$  die Bedingungen aus Theorem 2.3. Gleichzeitig sind die Bedingungen aus Theorem 2.2 erfüllt. Also liegt hier ein globales Optimum vor.

Mit ein bißchen ökonomischer Intuition hätten wir dieses Ergebnis schneller finden können: Das (konstante) Grenzprodukt des Faktors Kapital ist doppelt so groß wie das (konstante) Grenzprodukt des Faktors Arbeit. Gleichzeitig ist 2,5 mal so teuer wie Arbeit. Also sollte die Produktion nur mit Arbeit erfolgen.

## 2.8 Der Kuhn-Tucker Ansatz

Betrachten wir jetzt ein Maximierungsproblem mit einer **Nebenbedingung in Ungleichheitsform** und NNB.

$$\max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n)$$

u.d. Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &\leq b \\ x_i &\geq 0, \quad i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

**Theorem 2.5 (Kuhn-Tucker)** *Wenn  $x^*$  die Funktion  $f(x)$  unter den Nebenbedingungen  $g(x) \leq b$  und  $x_i \geq 0$  maximiert, und wenn  $g_i(x^*) \neq 0$  für wenigstens ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dann existiert eine reelle Zahl  $\lambda^*$ , so daß für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$*

$$L_i(x^*, \lambda^*) \leq 0, \quad x_i^* \geq 0, \quad x_i^* L_i(x^*, \lambda^*) = 0$$

und

$$L_\lambda(x^*, \lambda^*) \geq 0, \quad \lambda^* \geq 0, \quad \lambda^* L_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0$$

### Bemerkungen:

1. Die Interpretation der komplementären Slackness-Bedingungen für  $L_\lambda$  ist ganz analog zu der von  $L_i$ :

- Entweder die Nebenbedingung bindet. In diesem Fall sind wir zurück bei Lagrange und es muß gelten:

$$L_\lambda(x^*, \lambda^*) = -g(x^*) + b = 0$$

- Oder die Nebenbedingung bindet nicht. In dem Fall verschwindet die Nebenbedingung, weil der zugehörige Lagrange Parameter



gleich 0 wird. Das bedeutet auch, daß eine marginale Lockerung dieser Nebenbedingung keinen Einfluß auf den Wert der Zielfunktion an der optimalen Lösung hat.

2. Auch das Vorgehen ist analog zu Lagrange. Aber: Es gibt jetzt noch mehr Fallunterscheidungen. Insbesondere wenn es mehrere Nebenbedingungen in Ungleichheitsform gibt, wird es sehr aufwendig, alle Kandidaten für eine optimale Lösung zu bestimmen. In diesen Fällen ist eine gute ökonomische Intuition sehr wichtig, um zu ahnen, welche Nebenbedingungen binden und welche nicht.
3. In der Praxis wird man diejenigen Nebenbedingungen, von denen man vermutet, daß sie nicht binden, einfach ignorieren. Wenn die gefundene Lösung die weggelassenen Nebenbedingungen erfüllt, ist alles in Ordnung. Wenn nicht, muß man einen neuen Versuch starten.