

Aufgabenblatt 3

1. Eine Firma verkauft ein Gut auf einem kompetitiven Markt zum Preis $p = 10$. Die Produktionsfunktion ist

$$x = 2 \cdot L^{1/2}$$

wobei x der Output und L die zur Herstellung eingesetzte Arbeit ist. Maximal stehen 16 Einheiten Arbeit zur Verfügung.

- (a) Wie hoch ist der Schattenpreis der Arbeit, wenn zunächst kein Lohn bezahlt werden muss?
 - (b) Nehmen Sie an, dass die Firma zusätzlich Arbeiter zum Lohn von $w = 2$ einstellen kann. Wieviele Arbeiter werden noch eingestellt?
 - (c) Nun können zwar keine zusätzlichen Lohn-Arbeiter eingestellt werden, die Firma kann einer anderen Firma jedoch zwei Arbeitseinheiten abkaufen. Wie hoch ist ihre maximale Zahlungsbereitschaft für diese beiden Einheiten?
2. Eine Funktion $f(x)$ heißt
- konvex, wenn für alle x, y gilt:
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1$$
 - quasikonkav, wenn für alle x, y mit $f(x) \geq f(y)$ gilt:
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(y).$$
- (a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$ mit $x \geq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der obigen Funktionen mathematisch, dass $f(x)$ konvex und quasikonkav ist.
 - (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = \ln(x)$ quasikonkav ist.

3. Ein Individuum habe die quasi-lineare Nutzenfunktion

$$u(x_1, x_2) = f(x_1) + x_2$$

wobei $f' > 0$ und $f'' < 0$. Die Budgetbeschränkung ist gegeben durch

$$m \geq p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Steigung einer Indifferenzkurve nur von x_1 abhängt.
- (b) Lösen Sie das Nutzenmaximierungsproblem des Konsumenten.
- (c) Zeigen Sie, dass die Bedingungen erster Ordnung hinreichend für ein Maximum sind.

4. Gegeben ist die Nutzenfunktion

$$u(x_1, x_2) = \alpha \cdot \ln x_1 + \beta \cdot \ln x_2$$

mit $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Nutzenfunktion äquivalent zu $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha \cdot x_2^\beta$ ist. Was bedeutet äquivalent in diesem Zusammenhang?
- (b) Gegeben ist nun die Budgetrestriktion $m \geq p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$. Leiten Sie die Bedingungen 1. Ordnung für ein Nutzenmaximum ab.
- (c) Zeigen Sie, dass die Nutzenfunktion streng quasikonkav ist. Welche Auswirkungen hat diese Eigenschaft auf die unter (b) hergeleiteten Bedingungen?
- (d) Zeigen Sie, dass der Lagrange-Multiplikator im Optimum positiv ist. Was bedeutet dies mathematisch? Geben Sie den ökonomischen Grund dafür an.