

1 Maximierung ohne Nebenbedingungen

Literatur:

- Schulbücher zur Mathematik ab der 10. Klasse
- Hoy et.al. (2001), Chapter 4-6, 11, 12.
- Chiang (1984), Chapter 9-11.
- Binmore (1983), Chapter 3.

1.1 Funktionen mit einer Variablen

Betrachten Sie das folgende Maximierungsproblem:

$$\max_x f(x)$$

Dabei sei x eine reelle Zahl und $f(x)$ eine reellwertige Funktion, die wenigstens zweimal differenzierbar ist.

Wenn x^* ein Maximum dieser Funktion ist, dann muß die Steigung der Funktion an x^* genau gleich 0 sein. Warum?

Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{df(x^*)}{dx} = 0$$

Die Bedingung erster Ordnung ist eine **notwendige** aber keine **hinreichende Bedingung** für ein Maximum.

Was bedeutet das?

Wenn die Bedingung erster Ordnung erfüllt ist, können wir also noch nicht sicher sein, daß tatsächlich ein Maximum vorliegt. Diese Bedingung ist auch bei einem Minimum oder einem Wendepunkt erfüllt.

Beispiele:

- $f(x) = 4x - x^2$
- $f(x) = 4x - \ln x$
- $f(x) = 2x^3$
- $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$

Bedingung zweiter Ordnung:

$$\frac{df^2(x^*)}{dx^2} < 0$$

Wenn die Bedingung zweiter Ordnung an der Stelle x^* erfüllt ist, können wir sicher sein, daß es sich um ein **lokales Maximum** handelt.

Ein **globales Maximum** liegt an der Stelle x^* vor, wenn die Funktion $f(x)$ global (d.h. für alle möglichen Werte von x) konkav ist.

Theorem 1.1 *Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x^* ein globales Maximum, wenn*

$$\frac{df(x^*)}{dx} = 0$$

und wenn

$$\frac{df^2(x)}{dx^2} < 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

1.2 Beispiel: Warum sind Lehrbücher so teuer?

Sei:

x Anzahl der verkauften Bücher

$p(x)$ inverse Nachfragefunktion, $p(x) = a - bx$

$C(x)$ Kostenfunktion, $C(x) = cx$

t Tantiemensatz: Erlösanteil, den der Autor erhält

Wir fragen jetzt, welche Menge für den Autor bzw. für den Verlag optimal wäre. (Welche Art von Problem liegt hier vor?)

Welche Menge würde der Autor wählen?

$$\max_x t \cdot (a - bx) \cdot x$$

Bedingung erster Ordnung impliziert:
(Ausrechnen, Produktregel)

$$x^A = \frac{a}{2b}$$

Bedingung zweiter Ordnung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. (Prüfen)

Fazit: $x^A = \frac{a}{2b}$ ist die Verkaufsmenge, bei der der Autor seine Tantiemen maximiert.

Welche Menge würde der Verlag wählen?

$$\max_x (1 - t) \cdot (a - bx) \cdot x - cx$$

Bedingung erster Ordnung impliziert:
(Ausrechnen, Produktregel)

$$x^V = \frac{a - \frac{c}{1-t}}{2b}$$

Bedingung zweiter Ordnung ist für alle $x \in IR$ erfüllt. (Prüfen)

Fazit: $x^V = \frac{a - \frac{c}{1-t}}{2b}$ ist die Verkaufsmenge, bei der der Verlag seinen Gewinn maximiert.

Beachten Sie:

- Die gewinnmaximale Menge des Verlages ist kleiner als die optimale Menge für den Autor.
- Der gewinnmaximale Preis des Verlages ist höher als der optimale Preis für den Autor.
- Was ist die ökonomische Intuition für dieses Ergebnis? Argumentieren Sie mit Grenzerlös und Grenzkosten für den Autor und für den Verlag.

1.3 Beispiel: Die Lafferkurve

Gelegentlich wird argumentiert, daß eine Senkung der Steuersätze zu einer Erhöhung des Steueraufkommens führen würde. Kann das tatsächlich passieren?

Einfaches Beispiel mit Einkommensteuer. Sei:

x Beschäftigungsmenge in Stunden

w Bruttolohn pro Stunde

s Steuersatz pro Stunde (Stücksteuer!)

N Arbeitsnachfrage, $N(w) = a - bw$

A Arbeitsangebot, $A(w) = c + d(w - s)$

Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt: $N(w^*) = A(w^*)$ impliziert (ausrechnen!)

$$w^* = \frac{a - c}{b + d} + \frac{d}{b + d}s$$

und

$$x^* = N(w^*) = A(w^*) = a - b \left(\frac{a - c}{b + d} + \frac{d}{b + d}s \right)$$

Beachten Sie:

- $\frac{dw^*(s)}{ds} = \frac{d}{b+d} > 0$
- $\frac{dx^*(s)}{ds} = -\frac{bd}{b+d} < 0$

Bei welchem Steuersatz werden die Steuereinnahmen

$$T(s) = sx^*(s)$$

maximiert?

BEO:

$$\frac{dT}{ds} = a - \frac{b(a - c)}{b + d} - 2s \frac{bd}{b + d} = 0$$

impliziert

$$s^* = \frac{ad + bc}{2bd}$$

Bedingung zweiter Ordnung ist global erfüllt. Prüfen!

Fazit: Wenn der Steuersatz höher ist als s^* , dann führt eine Senkung des Steuersatzes tatsächlich zu einer Erhöhung des Steueraufkommens. Was ist die ökonomische Intuition?

1.4 Funktionen mit mehreren Variablen

Betrachten Sie das folgende Maximierungsproblem:

$$\max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n)$$

Dabei seien x_1, \dots, x_n reelle Zahlen und $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine reellwertige, multivariate Funktion, die wenigstens zweimal differenzierbar ist.

Alternative Schreibweise: $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f(x)$.

Wenn (x_1^*, \dots, x_n^*) ein Maximum dieser Funktion ist, dann muß die Steigung der Funktion an der Stelle x^* in allen Richtungen genau gleich 0 sein. Warum?

Bedingungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} f_1(x^*) &= \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} = 0 \\ f_2(x^*) &= \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2} = 0 \\ &\vdots \\ f_n(x^*) &= \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} = 0 \end{aligned}$$

Wieder gilt, daß die Bedingung erster Ordnung eine **notwendige** aber keine **hinreichende Bedingung** für ein Maximum ist.

Die **Bedingung zweiter Ordnung** verlangt, daß die Funktion $f(x)$ an der Stelle x^* konkav ist.

- Wenn die Funktion $f(x)$ an der Stelle x^* konkav ist, können wir

sicher sein, daß es sich um ein **lokales Maximum** handelt.

- Wenn die Funktion $f(x)$ überall konkav ist, können wir sicher sein, daß es sich um ein **globales Maximum** handelt.

1.5 Konkavität

Was genau bedeutet **Konkavität** und wie kann man bei einer multivariaten Funktion überprüfen, ob die Bedingung zweiter Ordnung erfüllt ist?

Definition 1.1 Eine Funktion $f(x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ist **konkav**, genau dann wenn für alle $k \in (0, 1)$ und alle $x', x'' \in \mathbb{R}^N$ gilt:

$$f(kx' + (1 - k)x'') \geq kf(x') + (1 - k)f(x'')$$

Bemerkungen:

1. Versuchen Sie sich klar zu machen, was diese Bedingung anschaulich verlangt. Warum muß die Funktion $f(x)$ an der Stelle x^* konkav sein, wenn die Funktion an der Stelle x^* ein Maximum hat?
2. Eine Funktion ist **streng konkav**, wenn \geq durch $>$ ersetzt werden kann.
3. Wir wissen bereits, daß eine differenzierbare Funktion mit einer Veränderlichen genau dann (streng) konkav ist, wenn $f''(x) \leq (<) 0$. Anschaulich: Wenn man eine Tangente an die Funktion anlegt, dann biegt sich eine konkave Funktion nach allen Richtungen von der Tangente nach unten weg.
4. Für eine Funktion mit mehreren Veränderlichen gilt ganz analog: Wenn man eine Tangentialebene an dieser Funktion betrachtet, und

wenn sich die Funktion in allen Richtungen nach unten von der Tangentialebene wegbiegt, dann ist die Funktion konkav.

Wie prüft man, ob eine differenzierbare Funktion mit mehreren Veränderlichen konkav ist?

Es genügt nicht, sich nur die zweiten partiellen Ableitungen $f_{11}(x^*)$, $f_{22}(x^*)$, \dots , $f_{nn}(x^*)$ anzuschauen und zu prüfen, ob diese zweiten Ableitungen alle kleiner als Null sind. Denn: Es könnte sein, daß die Funktion konkav ist, solange man sich in Richtung der Achsen bewegt, nicht aber, wenn man sich in einer anderen Richtung bewegt.

Um diese Möglichkeit auszuschließen, muß man sich auch die Kreuzableitungen der Funktion anschauen.

Mit dem folgenden Verfahren kann man prüfen, ob eine Funktion konkav ist:

- Man bildet die **Hesse Matrix** aller zweiten Ableitungen dieser Funktion:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

- Die Funktion f ist konkav, genau dann wenn die Hesse Matrix **negativ semidefinit** ist. Das ist der Fall, wenn die Vorzeichen der Hauptminoren dieser Matrix abwechselnd nicht-positiv und nicht-

negativ sind:

$$f_{11} \leq 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \quad (-1)^m \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mm} \end{vmatrix} \geq 0$$

für alle $1 \leq m \leq n$.

- Die Funktion f ist **streng konkav**, wenn die Hesse Matrix **negativ definit** ist, d.h., wenn die Vorzeichen der Hauptminoren dieser Matrix ihr Vorzeichen wechseln (strikte Ungleichheitszeichen).

Übungsbeispiele:

- Prüfen Sie, ob die folgende Funktion konkav ist: $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 2x_1^2 - x_2^2$
- Unter welchen Bedingungen an a und b ist die folgende Funktion konkav: $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$

1.6 Anwendung: Optimale Klausurvorbereitung

x_1 Vorbereitungszeit für VWL

x_2 Vorbereitungszeit für BWL

V Erwartete Punktezah in VWL Klausur

B Erwartete Punktezah in BWL Klausur

$C(x_1 + x_2)$ Anstrengungskosten der Vorbereitung

Die Studentin möchte die Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) = V(x_1) + B(x_2) - C(x_1 + x_2)$$

maximieren. Die **Bedingungen erster Ordnung** verlangen:

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, x_2^*) &= V'(x_1^*) - C'(x_1^* + x_2^*) = 0 \\ f_2(x_1^*, x_2^*) &= B'(x_2^*) - C'(x_1^* + x_2^*) = 0 \end{aligned}$$

Im Optimum muß also gelten:

$$V'(x_1^*) = C'(x_1^* + x_2^*) = B'(x_2^*)$$

Interpretation: Im Optimum muß der Grenzertrag einer zusätzlichen Stunde Vorbereitungszeit für die BWL-Klausur gleich dem Grenzertrag einer zusätzlichen Stunde Vorbereitungszeit für die VWL-Klausur sein, und das wiederum muß gleich den Grenzkosten der letzten eingesetzten Stunde sein.

Unter welchen Bedingungen ist die Zielfunktion der Studentin konkav?

$$\begin{aligned} f_{11}(x_1, x_2) &= V''(x_1) - C''(x_1 + x_2) \\ f_{12}(x_1, x_2) &= -C''(x_1 + x_2) = f_{21}(x_1, x_2) \\ f_{22}(x_1, x_2) &= B''(x_2) - C''(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Die Zielfunktion ist konkav, wenn

$$V'' - C'' < 0$$

und wenn

$$(V'' - C'')(B'' - C'') - (C'')^2 = V''B'' - (V'' + B'')C'' > 0$$

Beachten Sie: Wenn $V'' < 0$, $B'' < 0$ und $C'' > 0$, dann ist die Zielfunktion konkav (hinreichende, aber nicht notwendige Bedingungen für Konkavität). Diese Bedingungen sind sehr plausibel. Warum?