

Aufgabenblatt 4

1. Nehmen Sie an, dass ein Monopolist ein Gut in zwei Fabriken mit den Kostenfunktionen

$$C_1 = 5 \cdot q_1 \quad C_2 = 6 \cdot q_2$$

herstellt. Die Preis-Absatz-Funktion ist gegeben durch $p = 100 - (q_1 + q_2)$

- (a) Berechnen Sie die gewinnmaximalen Outputmengen q_1 und q_2 .
 - (b) Welche Lösung ergibt sich, wenn die zusätzlichen Bedingungen $q_1 \geq 0$ und $q_2 \geq 0$ eingeführt werden?
 - (c) Welche Lösung ergibt sich, wenn zusätzlich zu den Nicht-Negativitäts-Bedingungen noch die Bedingungen $q_1 \leq 30$ und $q_2 \leq 30$ eingeführt werden?
 - (d) Wie hoch ist der Schattenpreis einer marginalen Kapazitätserweiterung der 1. Fabrik (2. Fabrik)?
2. Ein Individuum habe eine quasi-lineare Nutzenfunktion. Die Budgetbeschränkung ist gegeben durch $m \geq p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$.
- (a) Zeigen Sie für eine allgemeine quasi-lineare Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = f(x_1) + x_2$ mit $f' > 0$ und $f'' < 0$, dass die Steigung einer Indifferenzkurve nur von x_1 abhängt.
 - (b) Stellen Sie mit der Nutzenfunktion $u(\vec{x}) = x_1 + a \cdot \sqrt{x_2}$ den Lagrange-Ansatz auf und berechnen Sie aus den Bedingungen erster Ordnung die Nachfrage nach x_2 .

3. Klausuraufgabe Winter 2001/02

Ein Landwirt kann höchstens 50 Einheiten Land bewirtschaften, das er für den Anbau von Weizen oder Mais aufteilen muß. Mit x_1 (x_2) wird die Menge an Land für den Weizen-(Mais-)Anbau bezeichnet. Durch den Anbau erzielt er Erlöse in Höhe von $E(x_1, x_2) = 30 \cdot \ln(x_1) + 4 \cdot x_2$. Unabhängig von der konkreten Verwendung des Landes fallen je bewirtschafteter Bodeneinheit 3 Geldeinheiten an Kosten an. Der Landwirt kann nur bei Tageslicht arbeiten und muß deshalb zusätzlich zur Bodenbeschränkung auch die Zeitbeschränkung $2 \cdot x_1 + x_2 \leq 60$ berücksichtigen.

- (a) Stellen Sie das Optimierungsproblem des Landwirts und die Kuhn-Tucker-Bedingungen auf.
- (b) Ist es möglich, dass der Landwirt sein Land entweder nur für Weizen oder nur für Mais verwendet?
- (c) Gehen Sie davon aus, dass eine Randlösung im Sinne der Teilaufgabe b) kein Optimum ist und dass im Optimum nur eine der beiden Beschränkungen bindet. Zeigen Sie, dass der Landwirt nicht durch die Zeit beschränkt wird.
- (d) Berechnen Sie die optimale Aufteilung des Bodens. Wie hoch ist die Zahlungsbereitschaft des Landwirts für eine zusätzliche Einheit Boden?
- (e) Stellen Sie die Situationen aus den Teilaufgaben c) und d) in einem geeigneten Diagramm dar.

4. Klausuraufgabe Sommer 2002

Betrachten Sie einen Konsumenten mit folgender (streng quasikonkaver) Nutzenfunktion: $u(x_1, x_2) = x_1^{0,6} \cdot x_2^{0,4}$. Der Konsument hat ein Einkommen $m = 100$ und sieht sich Preisen $p_1 = 2$ und $p_2 = 5$ gegenüber. Gleichzeitig will das Individuum aber auch abnehmen und nicht mehr als 150 Kalorien pro Tag zu sich nehmen. Gut 1 hat pro Einheit 4 Kalorien, Gut 2 pro Einheit 6 Kalorien.

- (a) Stellen Sie das Optimierungsproblem des Individuums und die Kuhn - Tucker - Bedingungen auf.

- (b) Ist es möglich, daß die NNB im Optimum binden?
- (c) Welches Güterbündel würde das Individuum konsumieren, wenn sowohl die Budgetnebenbedingung als auch die Kaloriennebenbedingung binden würden? Berechnen Sie die Steigung der Indifferenzkurve in diesem Punkt und vergleichen Sie diese mit den Steigungen der Nebenbedingungen. Argumentieren Sie graphisch und begründen Sie **verbal**, welche Nebenbedingung im Optimum binden wird.
- (d) Berechnen Sie nun das optimale Konsumbündel unter der Annahme, daß nur die Kaloriennebenbedingung bindet.

5. * Klausuraufgabe Winter 2002/03

Ein Individuum konsumiert die beiden Güter x_1 und x_2 zu den jeweiligen Preisen $p_1 = 4$ und $p_2 = 5$. Es maximiert dabei seinen Nutzen, der durch folgende Nutzenfunktion gegeben ist: $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Es kann maximal ein Budget von $m = 100$ ausgeben. Zusätzlich muss es berücksichtigen, dass es von Gut x_1 nicht mehr als 20 Einheiten konsumieren kann.

- (a) Stellen Sie das Optimierungsproblem des Individuums und die Kuhn - Tucker - Bedingungen auf.
- (b) Ist es möglich, dass die NNB im Optimum binden?
- (c) Nehmen Sie an, dass beide Nebenbedingungen im Optimum binden. Welches Güterbündel würde dann das Individuum konsumieren? Berechnen Sie die Steigung der Indifferenzkurve in diesem Punkt, vergleichen Sie sie mit der Steigung der Nebenbedingungen und argumentieren Sie, ob der gefundene Punkt (x_1, x_2) tatsächlich ein Optimum darstellt.
- (d) Nehmen Sie nun an, dass zunächst $\alpha = \frac{9}{10}$ gilt und der Wert dann auf $\alpha' = \frac{3}{5}$ fällt. Zeigen Sie grafisch, wie sich diese Änderung auf das Optimum auswirkt und begründen Sie Ihre Antwort verbal.

6. * Ein Konsument hat die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Die Budgetbeschränkung ist gegeben durch $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 100$. Zusätzlich muss eine Zeitbeschränkung der Form $x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 80$ erfüllt werden.

- (a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und berechnen Sie die Bedingungen erster Ordnung.
- (b) Berechnen Sie aus den Bedingungen erster Ordnung das optimale Güterbündel des Konsumenten.

7. * Klausuraufgabe Sommer 2003

Ein Individuum konsumiert die beiden Güter x_1 und x_2 zu den jeweiligen Preisen $p_1 = 4$ und $p_2 = 2$. Es maximiert dabei seinen Nutzen, der durch folgende Nutzenfunktion gegeben ist: $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + ax_2$.

Es kann maximal ein Budget von m ausgeben.

- (a) Stellen Sie das Optimierungsproblem des Individuums auf. Können die Nicht-Negativitätsbedingungen binden? Wenn ja, welche und unter welchen Bedingungen? Berechnen Sie die im Optimum konsumierten Mengen x_1^* und x_2^* für alle von Ihnen ermittelten Fälle.
- (b) Interpretieren Sie den Parameter a und erläutern Sie, welche Auswirkungen eine Änderung von a auf Ihr Ergebnis in Teilaufgabe (a) hat.

Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben an, dass $a = 1$ und $m = 2$. Zusätzlich muss das Individuum nun beachten, dass von x_1 und x_2 jeweils nur maximal $\frac{10}{16}$ konsumiert werden können.

- (c) Stellen Sie das Optimierungsproblem des Individuums und die Kuhn-Tucker-Bedingungen auf.
- (d) Argumentieren Sie:
 - i. Ob und welche Nicht-Negativitätsbedingungen im Optimum binden.
 - ii. Ob und welche Nebenbedingungen im Optimum binden.

Berechnen Sie die im Optimum konsumierten Mengen x_1^* und x_2^* und überprüfen Sie so Ihre Argumentation.