

ZUSAMMENFASSUNG: OPTIMIERUNGSAUFGABEN (KAPITEL 1+2)

1. Maximieren ohne Nebenbedingungen (Übungsblatt 2)

(a) eine Variable

- Setze 1. Ableitung gleich Null.
- Überprüfe, ob es sich bei der Lösung tatsächlich um ein (eindeutiges) Maximum handelt: Die 2. Ableitung muss (streng) kleiner als Null sein (Funktion ist (streng) konkav).

(b) mehrere Variablen

- Setze die 1. partiellen Ableitungen gleich Null. Die optimalen Variablen finden sich entweder über das Einsetzverfahren oder über die Cramersche Regel (vollkommen gleichwertige Verfahren).
- Überprüfe, ob es sich bei der Lösung tatsächlich um ein (eindeutiges) Maximum handelt: Die Hessematrix muss negativ (semi)definit sein (Funktion ist (streng) konkav).

Beispiel:

$$|H_1| = f_{11} < 0;$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0; |H_3| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} < 0$$

2. Maximieren mit bindenden Nebenbedingungen (Übungsblatt 3)

- Wende das Lagrange-Verfahren an, um die optimalen Werte zu erhalten.
- Überprüfe, ob die BEO auch hinreichend für ein (eindeutiges) Maximum sind:
 - Überprüfe, ob die Menge, über die maximiert wird, konvex ist. Beachte: Eine Gerade schließt immer eine konvexe Menge ein!
 - Überprüfe, ob die Zielfunktion (streng) quasikonkav ist: Die Vorzeichen der geränderten Hessematrix müssen abwechselnd (streng) negativ und positiv sein.

Beispiel:

$$|H_1| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_1 \\ f_1 & 0 \end{vmatrix} < 0;$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} > 0; |H_3| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

3. Maximieren mit Nichtnegativitätsbeschränkungen und nicht-bindenden Nebenbedingungen (Übungsblatt 4): Kuhn-Tucker

- Allgemein: $\max f(x)$ s.t. $g(x) \leq b$ und $x \geq 0$ mit $x = (x_1, \dots, x_n)$
- Die BEO lauten:

$$L_i(x^*, \lambda^*) \leq 0 \quad x_i \geq 0 \quad x_i L_i = 0$$

$$L_\lambda(x^*, \lambda^*) \geq 0 \quad \lambda^* \geq 0 \quad \lambda^* L_\lambda = 0$$
- Bedeutet:
 - Wenn $L_\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^* \geq 0$
 - * Wenn $\lambda^* > 0$, dann bindet die Nebenbedingung: $g(x) = b$
 - * λ ist die Zahlungsbereitschaft für eine marginale Lockerung der Nebenbedingung
 - Wenn $L_\lambda > 0 \Rightarrow \lambda^* = 0$
 - * Die Nebenbedingung bindet nicht: Die Zahlungsbereitschaft für eine marginale Lockerung der Nebenbedingung ist Null
 - * beachte: $\lambda^* = 0 \Rightarrow$ Die Nebenbedingung verschwindet aus dem Optimierungsproblem
 - * Lösung des Optimierungsproblems ist identisch mit der Lösung von $\max f(x)$