# Maße der Risikoaversion

Bisher : $EU = \sum_i p_i u(x_i) = \int_a^b u(x)f(x)dx$

Heute: Wann ist Individuum A mehr risikoavers als Individuum B?

Ökonom: Falls A bereit wäre, mehr als B zu zahlen, um das Risiko zu vermeiden.

=> RISIKOPRÄMIE

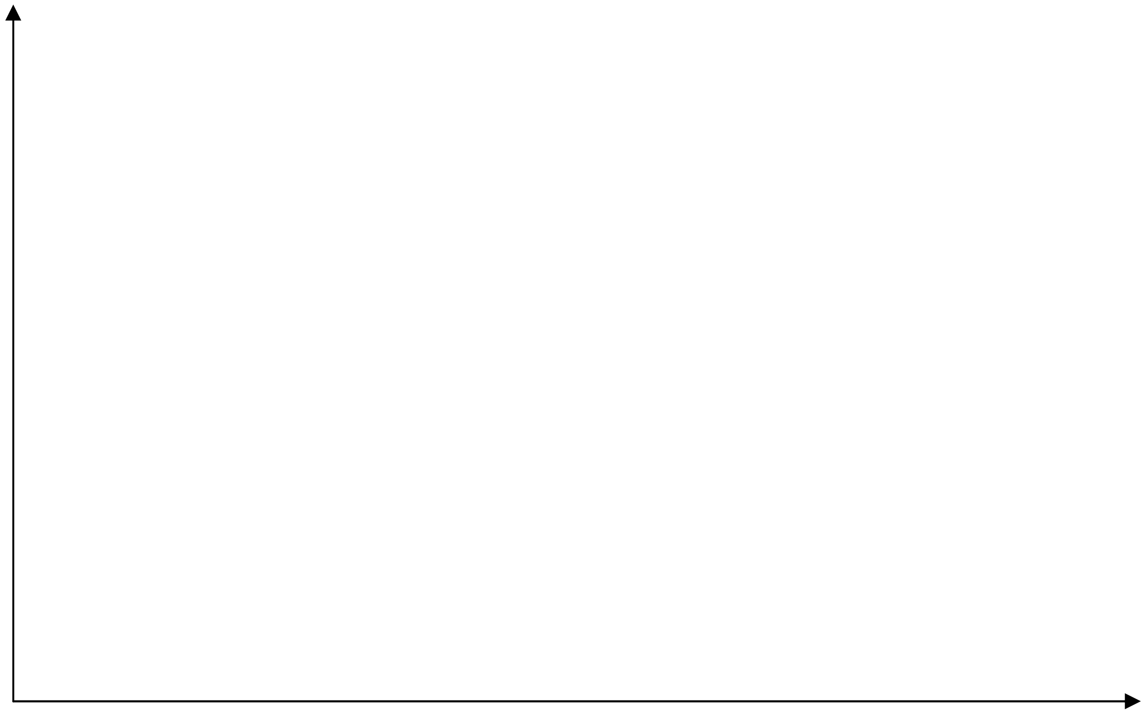
Sei $EU = \sum_i p_i u(x_i) = u(\hat{x})$

$\bar{x} = \sum_i p_i x_i$

Definition:

$$\boxed{\begin{array}{rl} \hat{x}: & \text{Sicherheitsäquivalent} \\ \bar{x} - \hat{x}: & \text{Risikoprämie (r)} \end{array}}$$

Individuum A ist mehr risikoavers als Individuum B, falls $r_A > r_B$.



Jensen :

$$u(\hat{x}) = E[u] < u(Ex) \qquad \text{falls } u \text{ konkav}$$

$$=> r = Ex - \hat{x} > 0$$

$$u(\hat{x}) > u(Ex) \qquad \text{falls } u \text{ konvex}$$

$$=> r < 0$$

=> Individuen mit $u'' < 0$ und $u'' > 0$ können wir mittels der Risikoprämie unterscheiden.

Vermutung für risikoaverse Individuen:

$$u_A'' < u_B'' => r_A > r_B \; ?$$

Problem: Nutzenfunktionen sind positiv linear transformierbar, betrachte

$$v = \alpha + \beta u, \quad \beta > 0$$

a) $r_v = r_u$

Bew.
$$\begin{aligned} u(\hat{x}) &= E[u] \\ E(v) &= \alpha + \beta E[u] \\ &= \alpha + \beta u(\hat{x}) \\ &= v(\hat{x}) \end{aligned}$$

Da $\bar{x}$ gleich $\Rightarrow r_v = r_u$

b) $v'' = \beta u'' \gtrless u''$ falls $\beta \gtrless 1$

c) aber:

$$-\frac{v''}{v'} = -\frac{\beta u''}{\beta u'} = -\frac{u''}{u'}$$

ist unabhängig von der Transformation

Bemerkung: Hier und im folgenden reden wir von ***lokaler*** Risikoaversion, d.h. ein Individuum ist risikoaverser als ein anderes bei kleinen Lotterien.

## Pratt-Arrow-Maß der Risikoaversion

Annahmen:

(i) $u(x)$ ist mindestens zweimal differenzierbar

(ii) $x_1, ..., x_n$ sind "klein";

$\bar{x} = 0$

(iii) $\sigma_x^3, \sigma_x^4, ...$ sind "klein" im Verhältnis zu $\sigma_x^2$

Sei w das Ausgangsvermögen.

$$u(w + \hat{x}) = \Sigma p_i\, u(w + x_i)$$

Betrachte $u(w + x_i) \simeq u(w) + u'(w)\, x_i + ½\, u''(w)\, x_i^2$

$$\Rightarrow \quad E[u(w + x_i)] \simeq u(w) + ½\, u''(w)\, \sigma_x^2 \qquad (\#)$$

Da $\bar{x} = 0$, $r_x = -\hat{x}$:

$$u(w - r_x) \simeq u(w) - r_x\, u'(w) \qquad (\#\#)$$

(#) + (##): $-r_x\, u'(w) = ½\, u''(w)\, \sigma_x^2$

$$\Rightarrow r_x \cong -\frac{u''(w)}{u'(w)} \cdot \frac{\sigma_x^2}{2} \qquad -\frac{u''(w)}{u'(w)} \equiv A(w)$$

***A(w) ≡ P-A-Maß der absoluten Risikoaversion!***

Bemerkungen:

- P-A-Maß ist ein lokales Maß, für größere Lotterien ist es lediglich eine Approximation
- Vorzeichen ist immer korrekt:
  u konkav => u´´ < 0 => $r_x$ > 0
- Hin und wieder findet man auch in der Literatur:
  Risiko-Toleranz: T(w) = A(w)$^{-1}$

Betrachte nun folgenden Fall:

Der Zinssatz sei unsicher: 1 + $x_i$
=> Endvermögen w (1 + $x_i$)

Def.: relative Risikoprämie: $\rho_x$ s.d.

$$E[u(w\,(1 + x_i))] = u(w\,(1 - \rho_x))$$

(gegeben daß $\bar{x} = 0$)

Ähnliche Rechnung wie zuvor

$$\Rightarrow \rho_x \cong -\frac{w \cdot u''(w)}{u'(w)} \cdot \frac{\sigma_x^2}{2} \qquad -\frac{w \cdot u''(w)}{u'(w)} \equiv R(w)$$

***R(w) $\equiv$ P-A-Maß der relativen Risikoaversion!***

Erweiterung: $w = w_0 + \tilde{w}$

$\tilde{w} = w_1\,(1 + \tilde{x})$, $\tilde{x}$ „klein“, $E[x] = 0$

Def. $\hat{\rho}_x$ = partielle Risikoprämie, so daß

$$u(w_0 + w_1\,(1 - \hat{\rho}_x)) = E[u(w_0 + w_1\,(1 + \tilde{x}))]$$

$$\text{L.S.} \simeq u(w_0 + w_1) - \hat{\rho}_x \cdot w_1 \cdot u'(w_0 + w_1)$$

$$\text{R.S.} \simeq u(w_0 + w_1) + E[\tilde{x}] \cdot w_1 \cdot u'(w_0 + w_1) + \tfrac{1}{2}\,E[\tilde{x}^2] \cdot w_1^2 \cdot u''(w_0 + w_1)$$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_x \cong -\frac{w_1 \cdot u''(w_0 + w_1)}{u'(w_0 + w_1)} \cdot \frac{\sigma_x^2}{2}$$

$$-\frac{w_1 \cdot u''(w_0 + w_1)}{u'(w_0 + w_1)} \equiv R_p(w)$$

$$\text{Beachte}: R_p(w) = \frac{w_1}{w} \cdot R(w)$$

Annahmen:

(i) $\frac{dA(w)}{dw} \leq 0$

*abnehmende absolute Risikoaversion*

Intuition: Risikoprämie sollte mit dem Vermögen abnehmen.

(ii) Des öfteren wird angenommen:

$\frac{dR(w)}{dw} \geq 0$

*zunehmende relative Risikoaversion*

Intuition: Sei $(1 + x) \in [0{,}9 ; 1{,}1]$

100 => 90 $\wedge$ 110

10.000 => 9.000 $\wedge$ 11.000

Im 2ten Fall kann die rel. Prämie größer sein.

$$r(w) = w \cdot A(w)$$

$$\frac{dR(w)}{dw} = A(w) + w \cdot \frac{dA(w)}{dw}$$

$A(w) > 0$ zunehmende RA, da mehr Geld nun riskant ist

$\frac{dA(w)}{dw} \leq 0$ abnehmende RA, da Vermögen steigt

Beispiele:

(i) Quadratische Nutzenfunktionen:

$$u(w) = w - \quad w^2$$

$$\Rightarrow \qquad A(w) = -\frac{-2}{1-2\alpha w} > 0$$

$$\text{aber :} \qquad A'(w) = \left(\frac{2\alpha}{1-2\alpha w}\right)^2 > 0$$

Dennoch wird diese NF häufig benutzt,
da E[u] = v($\bar{w}$, $\sigma_w^2$) (siehe Übung)

(ii) Logarithmische Nutzenfunktion:

$$u(w) = \ln(w)$$

$$\Rightarrow \qquad A(w) = \frac{w}{w^2} = \frac{1}{w}$$

$$A'(w) = -\frac{1}{w^2} < 0$$

- $R(w) = w \cdot A(w) = 1$

(iii) Power-Nutzenfunktion

$$u(w) = \frac{w^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

$$u'(w) = w^{-\sigma}, \qquad u''(w) = -\sigma w^{-\sigma-1}$$

$$\Rightarrow \quad A(w) = \frac{\sigma}{w}, \quad A' < 0$$

$$R(w) = \sigma$$

***CRRA-Funktionen!***

(Spezialfall: $\sigma \to 1$ => $u(w) \to \ln(w)$)

(iv) Exponential-Nutzenfunktionen:

$$u(w) = -e^{-\alpha \cdot w}$$

$$\Rightarrow \quad A(w) = \alpha$$

***CARA-Funktionen!***

(v) Verallgemeinerung:

**HARA-Funktionen!** (H=Hyperbolic)

$$u(w) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\alpha w}{1-\gamma} + \beta\right)^{\gamma}; \quad \frac{\alpha w}{1-\gamma} + \beta \geq 0$$

$$\Rightarrow A(w) = \frac{\alpha}{\frac{\alpha w}{1-\gamma} + \beta}$$

- T(w) ist linear in w (LRT)
- $\beta = 1, \quad \gamma = 2, \quad \alpha \to 2\alpha' \Rightarrow$ quadratisch

  $\beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \alpha = 1 \Rightarrow$ logarithmisch

  $\beta = 0, \quad \gamma = 1 - \sigma, \quad \alpha = 1 \Rightarrow$ Power

  $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha', \quad \gamma \to -\infty \Rightarrow$ exponential

# Globale Risikoaversion (Pratt, 1964)

THEOREM:

Gegeben ein riskantes Projekt $\tilde{x}$, und zwei Nutzenfunktionen $u_A$, $u_B$.

Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(a) $A_A(w) \geq A_B(w) \qquad \forall\, w$

(b) $r_A(\tilde{x},w) \geq r_B(\tilde{x},w) \qquad \forall\, w, \tilde{x}$

(c) $u_A(\cdot) = G(u_B(\cdot))$, wobei G eine konkave Funktion ist

(d) $$\frac{u_A(w_3) - u_A(w_2)}{u_A(w_1) - u_A(w_0)} \leq \frac{u_B(w_3) - u_B(w_2)}{u_B(w_1) - u_B(w_0)}$$

$\forall\, w_0, w_1, w_2, w_3$ mit $w_0 < w_1 \leq w_2 < w_3$

Beweis:

*(c) => (b):*

$$\begin{aligned} u_A(w + \bar{x} - r_A(\tilde{x},w)) &= E[u_A(w + \tilde{x})] \\ &= E[G(u_B(w + \tilde{x}))] \\ \text{(Jensen)} \quad &\leq G(E[u_B(w + \tilde{x})]) \\ &= G(u_B(w + \bar{x} - r_B(\tilde{x},w))) \\ &= u_A(w + \bar{x} - r_B(\tilde{x},w)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow r_A(\tilde{x},w) \geq r_B(\tilde{x},w)$

*(c) => (a):*

$$A_A(w) = -\frac{u_A''(w)}{u_A'(w)} = -\frac{G'(.)u_B''(w) + G''(.)(u_B'(w))^2}{G'(u_B(w)) \cdot u_B'(w)}$$

$$= -\frac{u_B''(w)}{u_B'(w)} - \frac{G''(.) \cdot u_B'(w)}{G'(.)} \qquad \left(-\frac{G''(.) \cdot u_B'(w)}{G'(.)} \geq 0\right)$$

$$\geq A_B(w)$$

*(a) => (c):*

mit G´ > 0 muß G´´(·) ≤ 0 sein

*(a) => (d):* [komplizierter]

$$\int_{w_1}^{w_2} A_A(w)dw = -\ln(u_A´(w))\Big|_{w_1}^{w_2}$$

$$= -\ln\left(\frac{u_A´(w_2)}{u_A´(w_1)}\right) \geq -\ln\left(\frac{u_B´(w_2)}{u_B´(w_1)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_A´(w_2)}{u_A´(w_1)} < \frac{u_B´(w_2)}{u_B´(w_1)} \qquad \text{für } w_1 < w_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_A(w_3) - u_A(w_2)}{u_A´(w_1)} < \frac{u_B(w_3) - u_B(w_2)}{u_B´(w_1)} \qquad \text{für } w_3 > w_2$$

analog für reziproken Ausdruck, somit gilt q.e.d.
*(d) => (a):*

Setze $w_3 = w_2 + \Delta$, $w_1 = w_2$, $w_0 = w_2 - \Delta$

und nutze:

$$u''(x) \cong \frac{1}{\Delta^2}[u(x+2\Delta)-u(x)]$$

$$u'(x) \cong \frac{1}{\Delta}[u(x+\Delta)-u(x)]$$

## Erweiterungen:

## Kimball (Econometrica 1990)

Überlegung: Vermögen morgen ist unsicher.

$$\max_c u(c) + \beta E[u(w - c + \tilde{x})]$$

B.e.O. $u'(c) = \beta E[u'(w - c + \tilde{x})]$

Def. $\psi$: vorbeugende Prämie, $\bar{x} = 0$

s.d. $E[u'(w - c + \tilde{x})] = u'(w - c - \psi)$

$$\ldots \quad \Rightarrow \quad \psi \cong -\frac{u'''(w-c)}{u''(w-c)} \cdot \frac{\sigma_x^2}{2}$$

$$-\frac{u'''(w-c)}{u''(w-c)} \equiv p(w-c):$$

Maß der absoluten Vorsichtigkeit (abs. prudence)

Interpretation:

Je größer $p_x(w - c)$, desto mehr spare ich in Periode 1, desto kleiner ist c.

i.a. $\frac{dp´(w)}{dw} \leq 0$

# Weitere Konzepte:

- Ross (1981): $u_A$ mehr risikoavers als $u_B$, falls

$$\exists\lambda \quad \forall y, y' \qquad \frac{u_A''(y)}{u_B''(y)} \geq \lambda \geq \frac{u_A'(y)}{u_B'(y)}$$

Anwendung: Ermittlung von Präferenzordnung über Lotterien, falls „*background risk*“ vorhanden ist. (vgl. Vorlesung Versicherungs-märkte)

- Gollier, Pratt (1996), Kimball (1992):

$$t(w) = -\frac{u''''(w)}{u'''(w)}$$

*absolute temperance (Enthaltsamkeit)*

- Kimball (1993): *Standard Risk Aversion*

falls $p'(w) \leq 0$ (oder $t(w) \geq p(w)$)

und $A'(w) \leq 0$ (oder $p(w) \geq A(w)$)

•
•
•
•