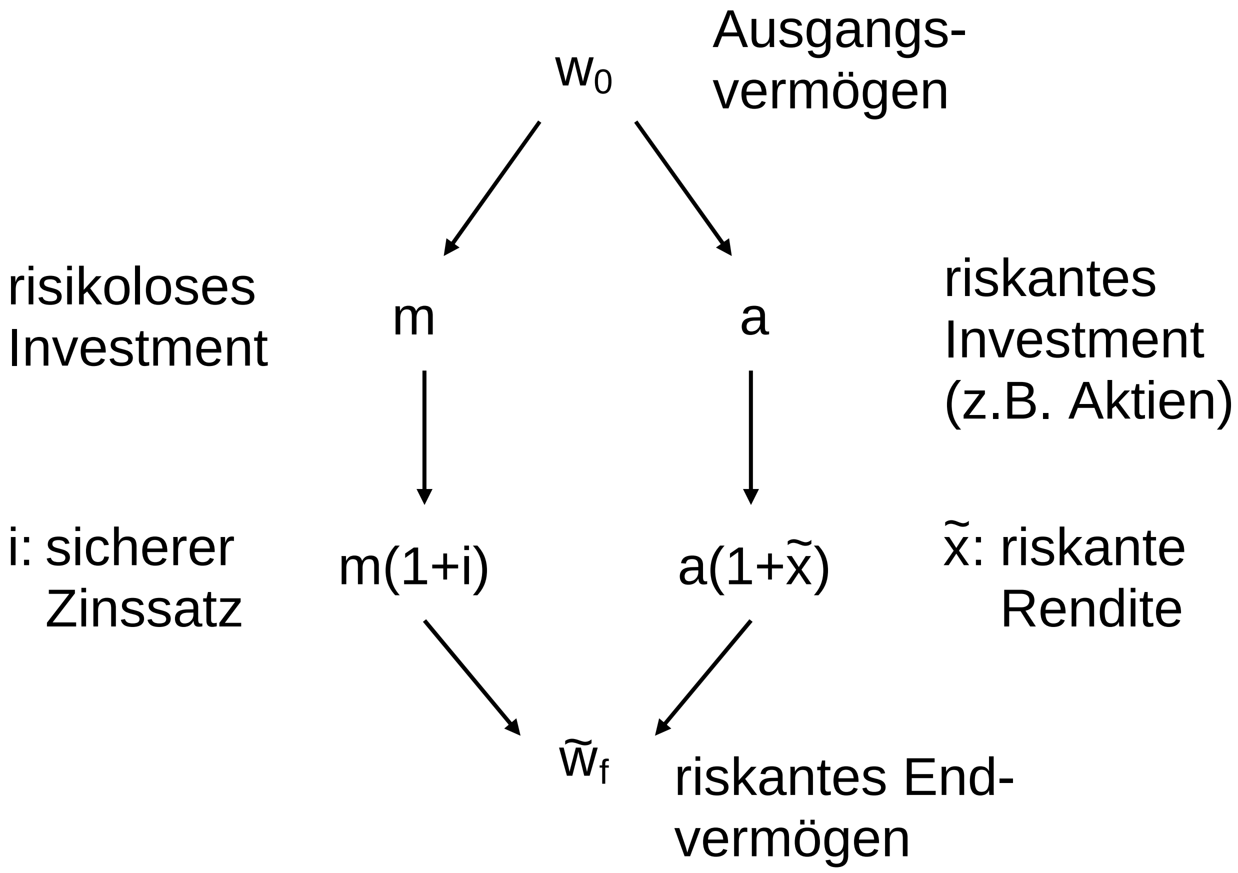
Anwendungen

I. PORTFOLIOOPTIMIERUNG

Entscheidungsproblem:



$$\Rightarrow \quad \max_{m,a} E\left[u\left(m(1+i)+a(1+\tilde{x})\right)\right]$$

$$\text{s.t.} \quad m + a \le w_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \max_{a} E\left[u\left(w_0(1+i)+a(\tilde{x}-i)\right)\right]$$

$$\text{B.e.O.}: \quad E\left[u'\left(w_0(1+i)+a(\tilde{x}-i)\right)\cdot(\tilde{x}-i)\right] = 0$$

$$\text{B.z.O.}: \quad E\left[u''(\ldots)\cdot(\tilde{x}-i)^2\right] < 0;$$

$$u''(\ldots) \le 0, \text{ falls r.a.} \qquad (\tilde{x}-i)^2 \ge 0$$

$$a = 0: \quad \text{B.e.O.} \to E\left[u'\left(w_0(1+i)\right)(\tilde{x}-i)\right]$$

$$= u'\left(w_0(1+i)\right)\cdot E(\tilde{x}-i)$$

$$= u'\left(w_0(1+i)\right)\cdot(\mu - i)$$

$a^* \begin{smallmatrix} > \\ < \end{smallmatrix} 0$ genau dann, wenn $\mu \begin{smallmatrix} > \\ < \end{smallmatrix} i$

Auch risikoaverse Individuen halten riskante Vermögen, falls ihr erwarteter Return größer als der der sicheren Investition ist.

Erklärung: Bei sehr kleinen riskanten Projekten ($a \to 0$) verhält sich das Individuum fast risikoneutral.

Komparative Statik:

w_0: Implizite Funktionen Theorem:

$$M(w_0, a^*) = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial w_0} + \frac{\partial M}{\partial a} \cdot \frac{\partial a^*}{\partial w_0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial a^*}{\partial w_0} = -\frac{\partial M / \partial w_0}{\partial M / \partial a}$$

$$\text{aus B.e.O.:}\quad M(w_0, a^*) = E[u'(w_0(1+i) + a(\tilde{x}-i))(\tilde{x}-i)] = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial a} = \text{B.z.O.} < 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}\left[\frac{\partial a^*}{\partial w_0}\right] = \operatorname{sgn}\left[\frac{\partial M}{\partial w_0}\right]$$

$$\frac{\partial M}{\partial w_0} = E[u''(w_0(1+i) + a(\tilde{x}-i))(\tilde{x}-i)](1+i);$$

$$u''(\ldots) \le 0; \qquad (\tilde{x}-i) < \text{od.} > 0$$

$$\text{nutze:}\quad -u''(y) = A(y)\cdot u'(y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial w_0} = E[-A(\tilde{y}_f)u'(\tilde{y}_f)(\tilde{x}-i)](1+i)$$

$$\text{mit}\ \ \tilde{y}_f = w_0(1+i) + a(\tilde{x}-i)$$

$$\text{wissen:}\ E[u'(\tilde{y}_f)(\tilde{x}-i)] = 0$$

a) $A(y) = \text{const.} \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial w_0} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial a^*}{\partial w_0}$

b) $A(y) = \text{fallend (DARA)}$

$(\tilde{x} - i) < 0 \quad \Rightarrow \tilde{y}_f \text{ klein} \quad \Rightarrow A(\tilde{y}_f) \text{ groß}$

$(\tilde{x} - i) > 0 \quad \Rightarrow \tilde{y}_f \text{ groß} \quad \Rightarrow A(\tilde{y}_f) \text{ klein}$

d.h. negative $u'(\tilde{y}_f)(\tilde{x} - i)$ werden stärker gewichtet, positive $u'(\tilde{y}_f)(\tilde{x} - i)$ schwächer.

Da der Ausdruck mit (-1) multipliziert wird, gilt :

$$\frac{\partial M}{\partial w_0} > 0$$

Individuen mit abnehmender absoluter Riskoaversion (d.h. A‘(w)<0) kaufen mehr von dem riskanten Projekt, wenn ihr Einkommen steigt. Riskante Projekte sind ein normales Gut.

i: wie vorhin ...

$$\operatorname{sgn}\frac{da^*}{di} = \operatorname{sgn}\frac{\partial M}{\partial i}$$

$$M = E\left[u'\left(w_0(1+i) + a(\tilde{x}-i)\right)(\tilde{x}-i)\right]$$

$$\frac{\partial M}{\partial i} = E[-u'\left(w_0(1+i) + a^*(\tilde{x}-i)\right) +$$

$$+u''\left(w_0(1+i) + a^*(\tilde{x}-i)\right)(w_0 - a^*)(\tilde{x}-i)]$$

$$= E[- u'(y_f) + u''(y_f)(w_0-a^*)(x-i)]$$

Substitutionseffekt

Vermögenseffekt:

z.B. DARA und w_0 - a > 0
=> Effekt positiv

$$\frac{da*}{di} = -\frac{\partial M/\partial i}{\partial M/\partial a} = -\frac{E[-u'(\tilde{y}_f)]}{\partial M/\partial a} - (w_0 - a*)\frac{E[u''(\tilde{y}_f)(\tilde{x} - i)]}{\partial M/\partial a}$$

$$\boxed{\frac{da*}{di} = \frac{-E[u'(\tilde{y}_f)]}{-\partial M/\partial a} + \frac{(w_0 - a*)}{(1+i)} \cdot \frac{da*}{dw_0}}$$

SLUTSKY-GLEICHUNG

$$\frac{da*}{dw_0} < 0 \text{ (IARA) und } (w_0 \text{ - } a*) > 0 \Rightarrow \frac{da*}{di} < 0$$

$$\frac{da*}{dw_0} > 0 \text{ (DARA) und } (w_0 \text{ - } a*) < 0 \Rightarrow \frac{da*}{di} < 0$$

ansonsten: ?

Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse:

Problem: $\max\limits_{a} E\left[u\left(w_0(1+i)+a(\tilde{x}-i)\right)\right]$

B.e.O.: $E\left[u'\left(w_0(1+i)+a(\tilde{x}-i)\right)(\tilde{x}-i)\right]=0$

$\Rightarrow a^*(w_0, i)$

- $a^* > 0$ g.d.w. $E[\tilde{x}] > i$
  $a^* < 0$ g.d.w. $E[\tilde{x}] < i$

- $\dfrac{da^*}{dw_0} > 0$ g.d.w. $A'(w) < 0$ (DARA)
  $\dfrac{da^*}{dw_0} < 0$ g.d.w. $A'(w) > 0$ (IARA)

- $\dfrac{da^*}{di} = -\dfrac{E[u'(\tilde{y}_f)]}{-\partial M/\partial a} + \dfrac{(w_0 - a^*)}{(1+i)}\dfrac{da^*}{dw_0}$

$\wedge\ M = E\left[u'(\tilde{y}_f)(\tilde{x}-i)\right]$ (B.e.O.)

Anstieg des Risikos (E & G, 142 ff.)

$$\tilde{x} \to f(s) \qquad s: \text{Realisation von } \tilde{x}$$

neu: $\tilde{y} \to g(s)$

mit: $\int_a^b sf(s)ds = \int_a^b s \cdot g(s)ds$ (gleicher Mittelwert)

$\forall x$: $\int_a^x [G(s) - F(s)]ds \geq 0$ SOSD

B.e.O.: $\int_a^b u'(w_0(1+i) + a^*(s-i))(s-i)f(s)ds = 0$

Wir erwarten:

$$\int_a^b u'(w_0(1+i) + a^*(s-i))(s-i)g(s)ds < 0$$

(Denn dann wäre a** < a*, wobei a** der Teil des Vermögens w_0 ist, der in das riskante Projekt mit Wahrscheinlichkeitsdichte g(s) investiert wird.)

$\Leftrightarrow$ $\int_a^b u'(w_0(1+i) + a^*(s-i))(s-i)[g(s) - f(s)]ds < 0$

Nach dem Theorem von 4-9 ist dies genau dann der Fall, wenn $u'(y_f)(s - i)$ konkav in s ist.

(N.B.: Diese Aussage ist korrekt, auch wenn u´(.)(s - i) eine fallende Funktion ist. Dies folgt aus 4-5 mit T(b) = 0.)

$$\frac{d}{ds}\left[u'\left(w_0(1+i)+a^*(s-i)\right)(s-i)\right]=u''(.)(s-i)a^*+u'(.)$$

$$\frac{d^2}{ds^2}[...]=2u''(.)a^*+u'''(.)(s-i)(a^*)^2$$

$$2u''(.)a^*\leq 0 \qquad u'''(.)(s-i)(a^*)^2<\text{od.}>0?$$

Für risikoaverse Individuen, die mit einem Anstieg des Risikos bei gleichbleibendem Mittelwert konfrontiert werden (SOSD), ist keine Aussage bzgl. der Änderung des Anteils des riskanten Projekts im Portfolio möglich.

Reaktionen:

1. Es ist gut, daß die Ökonomie diese Uneindeutigkeiten zuläßt, ähnlich wie bei Giffen-Gütern.

   Suche nach ökonomischer Interpretation:

   f(s) $\rightarrow$ g(s), mehr Risiko

   => Substitutionseffekt $\rightarrow$ investiere mehr in "i"

   Einkommenseffekt $\rightarrow$ weniger Einkommen, somit benötigt man IARA für s klein:
   (s - i)u´´´ > 0

2. Beschränkungen der Nutzenfunktion:

   Falls a* > 0, und das Maß der partiellen Risikoaversion wächst in s und ist kleiner als 1, so ist a** < a*.

Bew.: $$R_p = -\frac{w_1 \cdot u''(w_0 + w_1)}{u'(w_0 + w_1)} = -(s-i)\cdot a^* \cdot \frac{u''(\tilde{y}_f)}{u'(\tilde{y}_f)}$$

$$\frac{\partial R_p}{\partial s} = -a^* \frac{u''}{u'} - (s-i)\cdot(a^*)^2 \left\{\frac{u'u''' - (u'')^2}{(u')^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{u'} \cdot \left[-a^* u''(1+R_p) - (s-i)(a^*)^2 u'''\right] \geq 0$$

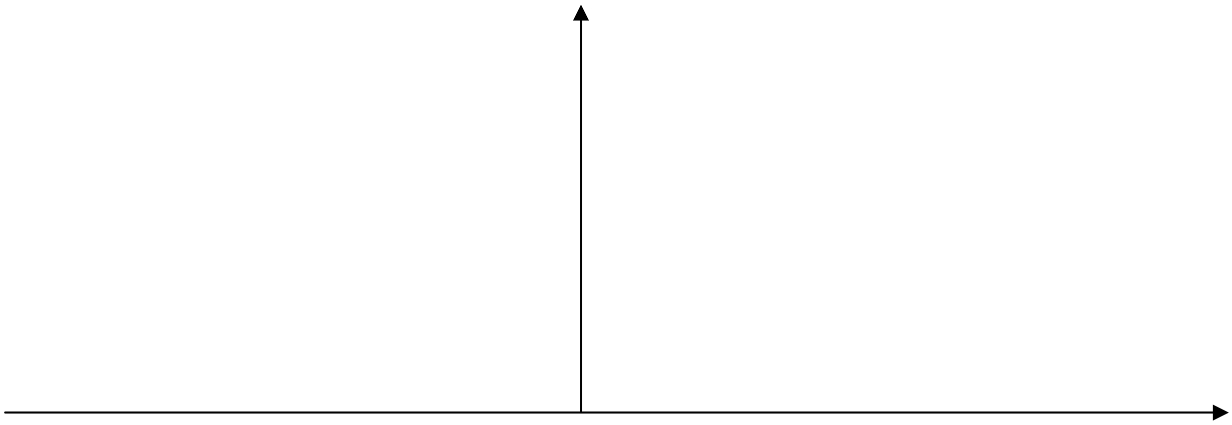
=> Ausdruck von 5-8 ist kleiner gleich Null!

$+ \quad dR_p / dw_1 \geq 0 \quad$ (O.K. mit Ann. (iii) von 3 - 7)

$-$ $\quad R_p < 1$: im Widerspruch zu empirischen Ergebnissen: $R(w) \cong 2 - 3$

3. Beschränkungen der Definition eines Anstiegs im Risiko (Meyer, Ormiston, 1985)

- *"strong increase in risk"*



- μ-σ-Ansatz: $\mu_1 = \mu_2 \wedge \sigma_1 > \sigma_2$
  => $a_2^* < a_1^*$ für DARA, CARA und "kleine" IARA
  (Sinn, 1990)

4. Marktgleichgewichte (Gollier & Schlesinger, 1997)

⇨ Fällt der Preis eines riskanten Projekts, falls das Risiko des Projekts steigt?

Antwort: nicht immer, nur wenn (wieder eine neue) Integralbedingung erfüllt ist.

Anstieg der Risikoaversion

Nutze Pratt: u_B risikoaverser als u_A
=> $u_B = G(u_A) \wedge G$ konkav

B.e.O. $E\left[u_A{}'\left(w_0(1+i)+a^*(\tilde{x}-i)\right)(\tilde{x}-i)\right]=0$

nun für u_B :

$$E\left[G'\left(u_A(.)\right)\cdot u_A{}'\left(w_0(1+i)+a^*(\tilde{x}-i)\right)(\tilde{x}-i)\right]$$
$$=\int_a^i G'\left(u_A(.)\right)\cdot u_A{}'\left(w_0(1+i)+a^*(s-i)\right)(s-i)f(s)ds$$
$$+\int_i^b G'\left(u_A(.)\right)\cdot u_A{}'(.)(s-i)f(s)ds$$

Beachte:

- erste Integralhälfte ist negativ, und für $s < i$
  $G'(u_A(w_0(1 + i) + a^*(s - i)) > G'(u_A(w_0(1 + i)))$
- zweite Integralhälfte ist positiv, und für $s > i$
  $G'(u_A(w_0(1 + i) + a^*(s - i)) < G'(u_A(w_0(1 + i)))$

=> Gesamtausdruck ist negativ => $a_B^* < a_A^*$

Risikoaversere Individuen kaufen weniger von einem riskanten projekt.

II. NACHFRAGE NACH VERSICHERUNG

Einfaches Modell:

2 Zustände der Welt:	1	2
Einkommen:	w_0	$w_0 - L$
Wahrscheinlichkeit:	$1 - \pi$	π

=> $E[u] = (1 - \pi)\, u(w_0) + \pi\, u(w_0 - L)$

Versicherung:

Deckungshöhe:	C
Prämienrate:	p
Prämie:	$p \cdot C$

Entscheidungsproblem:

$$\max_{c} (1-\pi)\cdot u(w_0 - p\cdot C) + \pi \cdot u(w_0 - L + (1-p)\cdot C)$$

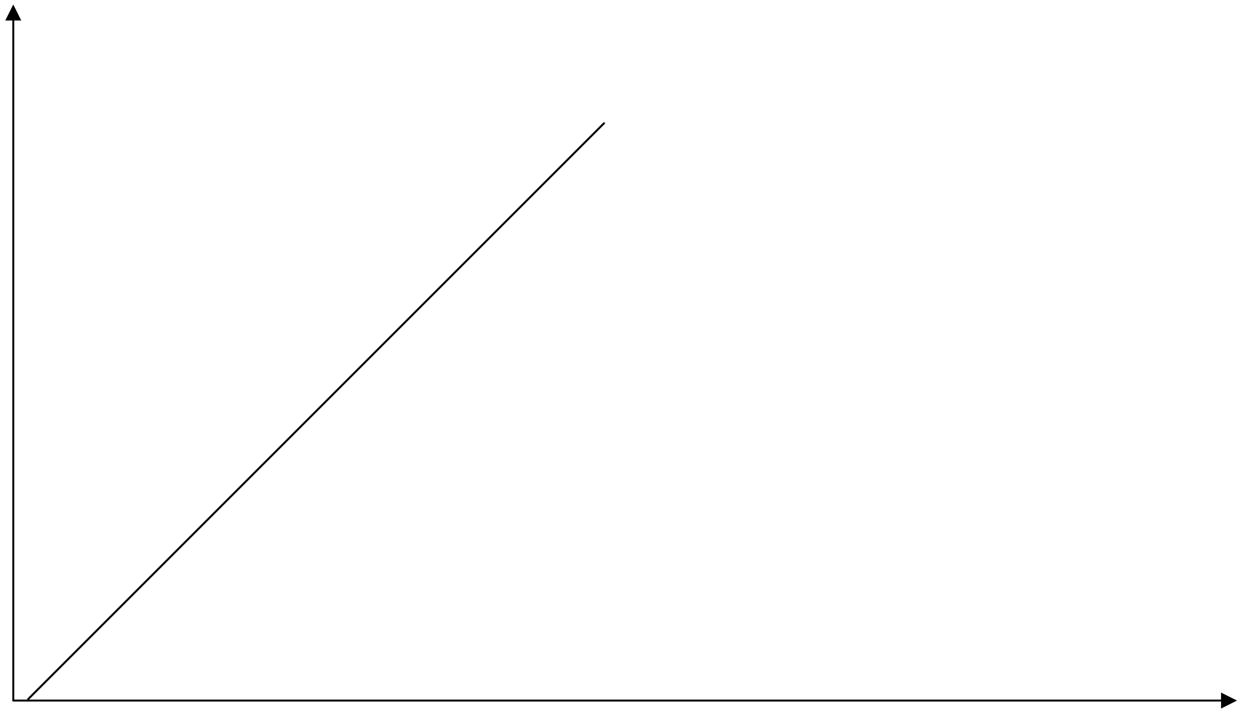
C: Nachfrage nach Vers.

p: Preis der Vers.

$\triangleq$ Nachfrage nach *zustandsabhängigen Einkommen!*

$$\text{B.e.o.}:$$
$$-p(1-\pi)\cdot u'(w_0-pC)+\pi(1-p)\cdot u'(w_0-L+(1-p)C)=0$$

$$\Rightarrow \frac{(1-\pi)\cdot u'(w_0-pC)}{\pi\cdot u'(w_0-L+(1-p)C)}=\frac{1-p}{p}$$



p = π => Vollversicherung zu fairen Preisen/ Prämie

p > π => Teilversicherung

$$\frac{u'(w_1)}{u'(w_2)}=\frac{1-p}{p}\cdot\frac{\pi}{1-\pi}\begin{cases}<1 & p>\pi\Rightarrow w_1>w_2\Leftrightarrow C<L\\ =1 & p=\pi\Rightarrow w_1=w_2\Leftrightarrow C=L\\ <1 & p<\pi\Rightarrow w_1<w_2\Leftrightarrow C>L\end{cases}$$

$$[\text{"fair"}: E[G]=p\cdot C-\pi\cdot C=(p-\pi)\cdot C]$$

offene Fragen:

• woher kommt p? (siehe auch Abschnitt 9)	*Angebot von Versicherung*
• mehr als eine Schadenshöhe? z.B. Auto-Kaskovers.	*Modell v. Raviv* *=> Selbstbehalt, Teilversicherung ...*
• Erwartungsnutzentheorie so anwendbar? z.B. Krankenversicherung	*unersetzbare Güter*
• zusätzliche Risiken, die nicht versicherbar sind?	*background risk*
• π, L beeinflußbar?	*moral hazard*
• π, L beobachtbar?	*adverse Selektion*

\+ ...

=> Versicherungsmärkte-Vorlesung

III. UNTERNEHMEN BEI UNGEWIßHEIT

(1) Produktionsentscheidungen

(2) Investitionsentscheidungen

Ad (1): G & R, 643 ff., E & G, 187 ff.

2 Formen der Unsicherheit:

(i) Technologische Unsicherheit

$$\underbrace{\tilde{a}}_{\text{realisierter Output}}(\text{Inputs}) = \underbrace{a}_{\text{geplanter Output}}(\text{Inputs}) + \underbrace{\varepsilon}_{\text{Unsicherheit}}$$

(Wetter, Streik, polit. Unsicherheiten, ...)

(ii) Markt-Unsicherheiten

- Faktor- und/ oder Produktpreise sind unsicher (Rohstoffpreisschwankungen, ungeahnte Produkteinführungen, ...)
- Nachfrageunsicherheit

Preisunsicherheit:

Endvermögen: $\tilde{w}_f = w_0 + p \cdot a - c(a)$

Besitzer maximiert $u(\tilde{w}_f)$

$$\Rightarrow \frac{d}{da} E[u(\tilde{w}_f)] = E[u'(w_0 + \tilde{p} \cdot a - c(a))(\tilde{p} - c'(a))] = 0$$

nutze: $E[\tilde{x} \cdot \tilde{y}] = \mathrm{Cov}(\tilde{x}, \tilde{y}) + E[\tilde{x}] \cdot E[\tilde{y}]$

$$\begin{aligned} \text{somit } \; 0 &= \mathrm{Cov}(u'(.), (\tilde{p} - c'(a))) + E[u'(.)] \cdot E[\tilde{p} - c'(a)] \\ &= \mathrm{Cov}(u'(.), \tilde{p}) + E[u'(.)] \cdot (E[\tilde{p}] - c'(a)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E[\tilde{p}] = c'(a) - \frac{Cov(u'(.), \tilde{p})}{E[u'(.)]}$$

Risikoneutrale Unternehmen: $E[\tilde{p}] = c'(a)$

Da $\quad \mathrm{Cov}(u'(.), \tilde{p}) < 0$

Definiere $-\frac{\mathrm{Cov}(u'(.), \tilde{p})}{E[u'(.)]}$ als zusätzliche 'psychologische' Grenzkosten, die durch Risikoversion und Preis-unsicherheit verursacht werden.

(Etwas) komparative Statik:

$c(a) = c_0 + c_1(a)$, $c_1(0) = 0$, c_0 = Fixkostenanteil

Frage: Ändert sich a^*, falls sich c_0 ändert?

$$\operatorname{sgn}\left[\frac{da^*}{dc_0}\right] = \operatorname{sgn}\left[\frac{\partial M}{\partial c_0}\right]$$

wobei $M = E\left[u'\left(w_0 + \tilde{p}a - c_0 - c(a)\right)\left(\tilde{p} - c'(a)\right)\right]$

Beachte:

$$\frac{\partial M}{\partial c_0} = -\frac{\partial M}{\partial w_0}$$

Ähnlichkeit mit Einkommenseffekt im Portfolio-optimierungsproblem

=> *Unternehmer mit abnehmender absoluter Risiko-aversion reduzieren ihre Produktionsmenge, falls die Fixkosten steigen.*

Intuition:

$c_0\uparrow$ impliziert $w_0\downarrow$

=> Unternehmer wird ärmer

=> Unternehmer wird risikoaverser

=> Unternehmer produziert weniger

Man kann zeigen:

$$\frac{d}{dc_0}\, - \frac{\mathrm{Cov}\left(u'(.), \tilde{p}\right)}{E\left[u'(.)\right]} \geq 0$$

d.h. psychologische Grenzkosten steigen

Ähnliche Ergebnisse wie in Sektion 4

- Anstieg des Risikos
- Anstieg im Mittelwert von p
- Anstieg der Risikoaversion

Technologische Unsicherheit:

(i) Additive Unsicherheit

$$w_f = w_0 + p(a + \tilde{\varepsilon}) - c(a)$$

$$\max_a E[u(\tilde{w}_f)]$$

$$\frac{d}{da} E[u] = E[u'(\tilde{w}_f)(p - c'(a))] = 0$$

$$(u'(\tilde{w}_f) \geq 0 \qquad p - c'(a) = 0)$$

$$\Rightarrow p = c'(a) = GK$$

Die Wahl von a hat marginal keinen Einfluß auf die Unsicherheit => Wahl von a wie bei risikolosen Entscheidungsproblem

(ii) Multiplikative Unsicherheit

$$\begin{aligned} \tilde{w}_f &= w_0 + p(a(1 + \tilde{\varepsilon})) - c(a) \\ &= w_0 + p(1 + \tilde{\varepsilon})a - c(a) \\ &\text{wobei } p(1 + \tilde{\varepsilon}) = \tilde{p} \end{aligned}$$

=> dasselbe Problem wie bei Preisunsicherheit

Investitionen bei Ungewißheit

Gegeben: 1 Investitionsprojekt (irreversibel)

Kosten: I (einmalig)

Gewinn: $\tilde{\pi}(t)$, t=1,... , unsicher

Orthodoxe Theorie:

Investiere, falls NPV $\geq$ 0, d.h.

$$E\left[\sum_{t=1}^{T} \delta^t \tilde{\pi}(t)\right] - I \geq 0$$

$$\left[\delta = (1+r)^{-1} \text{ Diskontierungsfaktor}\right]$$

aber:

- kann das Projekt verschoben werden?
- kann das Projekt abgebrochen werden?
- kann das Projekt unterbrochen werden?

=> *(Real)Optionen Theorie der Investition*

(z.B.: Verzögerungsoption, Abbruch/ Verkaufsoption, Warteoption, ...)

Bsp.: I = $ 1.600

$\delta = (1,1)^{-1}$

	t=0		t=1		t=2	...
		½ ↗	$ 300	→	$ 300	...
$\pi(t)$:	$ 200					
		½ ↘	$ 100	→	$ 100	...

$$\text{NPV}: E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi(t)\right] - I$$

$$= 200 + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \frac{300+100}{2} - I = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1{,}1)^t} - 1600$$

$$= \frac{200}{1 - \frac{1}{1{,}1}} - 1600 = 2200 - 1600 = 600 > 0$$

warte bis "morgen" (t=1):

Falls π = 100 => NPV(t=1) = 1100 - 1600 < 0
=> investiere nicht

π = 300 => NPV(t=1) = 3300 - 1600 > 0

"neues" Projekt: Warte eine Periode, investiere nur falls π = 300.

$$NPV(t=0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{NPV(t=1)}{1,1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1700}{1,1} = 773 > 600$$

Wert der Flexibilitätsoption: \$ 173 ($\equiv$ F)

– \$ 200 in Periode 0 (verzichte auf Ertrag heute)

\+ I - δI (muß erst in nächster Periode die Investitionskosten zahlen)

\+ \$ 300 statt (\$ 300 + \$ 100) / 2, Auflösung der Unsicherheit

Bemerkungen:

(i) I$\uparrow$ => F$\uparrow$

(ii) p_0 = \$ 200 $\uparrow$ (mit $p_1 = 1,5\ p_0$ bzw. $p_1 = 0,5\ p_0$)

$p_0 < 97$ => investiere nie

$97 < p_0 < 249$ => investiere in t = 1, falls $p_1 = 1,5\ p_0$

$p_0 > 249$ => investiere in t = 0

(iv) MPS: [300/100 $\rightarrow$ 350/50] => F$\uparrow$

(Zustände 100 (oder 50) sind äquivalent, beide führen zu NPV (t = 1) = 0

Anwendungen:

- *Zinssatz*: Der Real-Optionen Ansatz suggeriert, daß Unsicherheit Investitionen stärker als der Zinssatz beeinflußt.

- *Arbeitsmarkt*: "Hiring"- und "Firing"-Costs sind analog zu Investitions- und Abbruchkosten

  Konsequenz der Theorie:
  Hohe Unsicherheit => wenige Neueinstellungen

- *Hysteresis*:

  '80 - '84: $↑ => US-Importe ↑

  - '87: $↓ bis zum '80 Niveau, aber Importe fielen kaum

  Schwellenwerte: $\$ > \$_1$ => investiere

  $\$ < \$_2 << \$_1$ => desinvestiere

- Ölreserven
- Produkteinführung (z.B. Elektroauto)
- R & D
- Ehe
- Selbstmord
- Gesetzesänderungen

- **Mathematisches Rüstzeug**

1) Stochastische Prozesse

2) Ito's Lemma

3) Dynamische Optimierung bei Unsicherheit

=> ***4) Investitionsentscheidung***

ad 1):

Hier wird versucht, dynamische Unsicherheit zu modellieren. Das Ausgangsmodell ist der diskrete ***Random Walk***, ein Binominal-Modell: Sei $\tilde{\pi}$ unsicher, so daß

Erwartungswert:

$$E[\pi_1] = p(\pi_0 + \Delta h) + q(\pi_0 - \Delta h)$$
$$= \pi_0 + (p - q)\Delta h$$
$$E[\pi_t] = \pi_0 + t(p - q)\Delta h = \pi_0 + t(2p - 1)\Delta h$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}[\pi_1] = p(\pi_0 + \Delta h - (\pi_0 + (p - q)\Delta h))^2$$
$$+ q(\pi_0 - \Delta h - (\pi_0 + (p - q)\Delta h))^2$$
$$= p((1 + q - p)\Delta h)^2 + q((-1 - p + q)\Delta h)^2$$
$$= \left[p(2 - 2p)^2 + (1 - p)(-2p)^2\right](\Delta h)^2$$
$$= 4(1 - p)p(\Delta h)^2$$

$$\mathrm{Var}[\pi_t] = t \cdot 4(1 - p)p(\Delta h)^2$$

Beachte: Erwartungswert und Varianz sind linear in t.

Jetzt: Mache das Modell kontinuierlich.

(i) Intervall der Länge t hat $n = \frac{t}{\Delta t}$ diskrete Schritte

(ii) Setze $\Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t}$

(iii) Setze $p = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{}{}\sqrt{\ \ t}\right]$ und $q = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{}{}\sqrt{\ \ t}\right]$

$$E[\pi_t] = E\left[\pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right)\right] \quad \text{"n" diskrete Schritte}$$

$$= \pi_0 + \frac{t}{\Delta t} \cdot \frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t} \cdot \sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$= \pi_0 + \alpha \cdot t$$

$$\mathrm{Var}[\pi_t] = \frac{t}{\Delta t} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)\sigma^2 \Delta t$$

$$\xrightarrow[\lim \Delta t \to 0]{} t\sigma^2$$

Brownsche Bewegung (mit Drift)

$$d\pi = \alpha dt + \sigma \underbrace{dz}_{\text{Wiener - Prozess}}$$

Eigenschaften:

- Kontinuierlicher Pfad bei jeder Realisation
- stationäre, unabhängige Inkremente
  [$\pi(t) - \pi(s)$ hängt nur von t-s ab]
- $\pi(t) \sim \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Normalverteilung}}}{N}(\pi_0 + \alpha \cdot t, \sigma^2 \cdot t)$
- $E\left[\frac{d\pi(t)}{dt}\right]$ existiert nicht

  $$\left(\text{Grund}: \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} \to \infty\right)$$

Bemerkungen:

- relativ einfacher kontinuierlicher Prozeß
- Anwendungen: Aktienpreise

Ito's Lemma

Des öfteren benötigt man nicht $\pi(t)$ selber, sondern eine Transformation $F(\pi(t))$ (z.B. Optionspreis). Ito's Lemma gibt nun an, welchem stochastischen Prozeß $F(\pi(t))$ folgt:

$$d\pi(t) = \alpha dt + \sigma dz$$

$$\Rightarrow dF = \frac{dF}{d\pi} d\pi + \frac{d^2F}{d\pi^2} (d\pi)^2$$

$$= \frac{dF}{d\pi} (\alpha dt + \sigma dz) + \frac{1}{2} \frac{d^2F}{d\pi^2} \sigma^2 dt$$

$$= \left(\alpha \frac{dF}{d\pi} + \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{d^2F}{d\pi^2} \right) dt + \sigma \frac{dF}{d\pi} dz$$

Bemerkung: i.a. $\alpha = \alpha(\pi)$, $\sigma = \sigma(\pi)$

Bsp.: ***Geometrische Brownsche Bewegung***

$$d\pi(t) = \alpha\pi dt + \sigma\pi dz$$

$$F = \ln(\pi)$$

$$\Rightarrow dF = \left(\alpha\pi \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sigma^2 \pi^2 \frac{-1}{\pi^2} \right) dt + \sigma\pi \frac{1}{\pi} dz$$

$$= \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz$$

Dynamische Optimierung

hier: Dyn. Optimierung bei unendlichem Zeithorizont

Sei u die Entscheidungsvariable (z.B. investiere/ investiere nicht), $\pi(x,u,t)$ der instantane Gewinn (Gewinnfluß), der von der Brownschen Bewegung x abhängt, so gilt die folgende ***Bellman-Gleichung***.

$$V(x,t) = \max_u \left\{ \pi(x,u,t)\Delta t + (1 + r\Delta t)^{-1} E\left[V(x', t + \Delta t)\right] \right\}$$

V : Wertefunktion

$V(x', t + \Delta t)$: Wertefunktion bei $t + \quad t$, wenn $x' = x(t + \quad t)$

$$\Rightarrow r\Delta t \cdot V(x,t) = \max_u \left\{ \begin{array}{l} \pi(x,u,t)\Delta t(1 + r\Delta t) \\ + E\left[V(x', t + \Delta t) - V(x,t)\right] \end{array} \right\} \qquad \Big| : \Delta t$$

$$\Rightarrow r \cdot V(x,t) = \max_u \left\{ \pi(x,u,t) + \frac{E[\Delta V]}{\Delta t} \right\}$$

Investitionsentscheidung

- Investitionsprojekt: Kosten I

  Auszahlung P, wobei

  $dP = \alpha P dt + \sigma P dz$

  (geom. Brownsche Bew. sinnvoll, da dann P niemals negativ sein kann.)

- Wert des Projekts, falls investiert wird und P = P* ist:

$$V(P^*) = E\int_0^\infty e^{-rt} P(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-rt} P^* e^{\alpha t} dt = \frac{P^*}{r - \alpha}$$

(benötige: $r > \alpha$)

- Wert der Option:

  falls P groß => investiere => F(P) = V(P) - I

  falls P klein => investiere nicht => F(P) = ?

Bellmann:

$$F(P) = 0 + \frac{1}{1 + r\Delta t} E[F(P')]$$

$$r \cdot \Delta t \cdot F(P) = E[F(P') - F(P)]$$

$$= E[\Delta F(P)]$$

Ito

$$= E\left[\left(\alpha P \cdot \frac{dF}{dP} + \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 \frac{d^2F}{dP^2}\right) \cdot \Delta t + \sigma P \frac{dF}{dP} \Delta z\right]$$

Nutze: $E[\Delta t] = \Delta t$, $E[\Delta z] = 0$

$$\Rightarrow r \cdot \Delta t \cdot F(P) = \left(\alpha \cdot P \cdot F' + \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F''\right)\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F''(P) + \alpha \cdot P \cdot F'(P) - rF(P) = 0$$

$$\Rightarrow F(P) = A_1 P^{\beta 1} + A_2 P^{\beta 2}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \beta_i (\beta_i - 1) + \alpha \beta_i - r = 0$$

$$(\beta_1 > 1, \quad \beta_2 < 0)$$

aber: immer noch 2 Unbekannte (A_1, A_2)

Bed. 1: $F(0) = 0 \Rightarrow A_2 = 0$

(GBM: $P(t) = 0 \Rightarrow \forall\, \tilde{\varepsilon} > t: P(\tilde{t}) = 0$)

Bed. 2: ***Smooth Pasting***

Investiere, falls $P = P^*$, dann gilt

$F(P^*) = V(P^*) - I$

$F'(P^*) = V'(P^*)$

$$\Rightarrow \quad A_1 P^{*\beta_1} = \frac{P^*}{r-\alpha} - I$$

$$\beta_1 A_1 P^{*\beta_1 - 1} = \frac{1}{r-\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad (\beta_1 - 1)\frac{P^*}{r-\alpha} - \beta_1 I = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Investiere, wenn } P = P^* \text{ mit } \frac{P^*}{r-\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I$$

$$\text{NPV: Investiere, wenn } \frac{\hat{P}}{r-\alpha} = I$$

man kann zeigen: $\frac{d}{d\sigma}\frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} > 0$

Unsicherheit führt zu "späteren" Investitionen.