Sem. für Versicherungswissenschaft
Tobias Böhm

Problem Set 1 – **Problems for Chapter 2**

1. **Eigenschaften von Nutzenfunktionen**
   Welche der folgenden Nutzenfunktion stehen für (i) risiko-averses, (ii) risiko-liebendes, (iii) risiko-neutrales Verhalten? (Diagramm und formaler Beweis)

   (a) $u(x) = \ln x$

   (b) $u(x) = ax + bx^2$ für $a, b > 0$

   (c) $u(x) = ax - bx^2$ für $a, b > 0$

   (d) $u(x) = \sqrt{x}$

   (e) $u(x) = 100 + 6x$

   (f) $u(x) = 1 - e^{-rx}$

   (g) $u(x) = \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}$

2. **Jensens Ungleichung**

   (a) Zeigen Sie mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung, dass für jede zweifach differenzierbare Funktion $u(x)$ mit $u'(x) > 0,\ u''(x) \leq 0$ gilt: $u[E(x)] \geq E[u(x)]$.

   (b) Wann gilt obige Ungleichung strikt?

3. **St. Petersburg Paradox**

   Betrachten Sie folgende stetige Version des St. P.P.: wenn x eintritt, dann erhält ein Individuum $y = 10^x$ als Auszahlung. x ist eine Zufallsvariable und gemäß der Dichtefunktion $f(x) = e^{-x},\ x \in [0, \infty)$ verteilt.

   (a) Zeigen Sie, dass $f(x)$ eine Dichte ist.

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $x \leq 2$ ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn kleiner als 50000 ist?

   (c) Berechnen Sie den erwarteten Gewinn dieses Spiels.

   (d) Wie hoch wäre der Nutzen dieses Spiels, wenn das Individuum die Nutzenfunktion $u(y) = \ln y$ hat? Welcher sichere Geldbetrag würde den gleichen Nutzen stiften?

4. **Zustände der Welt**

   Betrachten Sie einen risikoaversen Bauern, der sich zwei möglichen Zuständen der Welt gegenüber sieht: gutes Wetter (G) und schlechtes Wetter (S). Der Ertrag seines Weizenfeldes sei 10 in Zustand G und 2 in Zustand S.

   (a) Stellen Sie obige Situation in einem Zwei-Zustände-der-Welt Diagramm dar.

   (b) Zeichnen Sie das Sicherheitsäquivalent des Bauerns in dem Diagramm ein.

   (c) Nehmen Sie an, der Bauer kann zustandsabhängiges Einkommen handeln: für eine Einheit in Zustand G werden q Einheiten in Zustand S bezahlt (q kann größer oder kleiner als eins sein). Zeichnen Sie die Budgetgerade in ihr Diagramm ein.

   (d) Wann wird der Bauer genauso viel zustandabhängiges Einkommen handeln, dass er im Endzustand ein sicheres Einkommen hat?

5. **Erwartungsnutzentheorie**

   Zeigen Sie, dass falls die Präferenzrelation über eine Menge von Lotterien durch eine Funktion $U(\cdot)$ mit den Eigenschaften einer von-Neumann Morgenstern Nutzenfunktion dargestellt werden kann, so erfüllt diese Präferenzrelation auch das Unabhängigkeitsaxiom. (Das Theorem der Erwartungsnutzentheorie sagt uns, dass die Umkehrbehauptung auch zutrifft.)

6. **Erwartungsnutzentheorie II**

Nehmen Sie an, die Feuerwehr möchte ein Kriterium entwickeln, wann eine Stadt, die öfters unter Überflutungen leidet, evakuiert werden soll. Die Wahrscheinlichkeit einer Überflutung ist 1%. Vier Zustände der Welt sind möglich:

A) Eine Evakuierung ist nicht nötig und sie findet nicht statt.

B) Eine Evakuierung findet statt, aber sie war nicht nötig.

C) Eine Evakuierung findet statt und sie war nötig.

D) Keine Evakuierung findet statt und es kommt zu einer Katastrophe.

Nehmen Sie an, die Feuerwahr ist indifferent zwischen dem sicheren Ereignis B und einer Lotterie, die A mit Wahrscheinlichkeit p und D mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ ergibt. Weiterhin sei sie indifferent zwischen dem sicheren Zustand C und einer Lotterie, die B mit Wahrscheinlichkeit q und D mit Wahrscheinlichkeit $1-q$ liefert.

(a) Konstruieren Sie eine vNM Nutzenfunktion der Feuerwehr.

(b) Betrachten Sie die folgenden beiden Entscheidungskriterien:

1) Kriterium 1 führt zu einer Evakuierung in 90% der Fälle, in denen eine Überflutung eintritt, in 5% aller Fälle findet allerdings eine unnötige Evakuierung statt.

2) Kriterium 2 ist etwas konservativer. Es bewirkt eine Evakuierung in 95% der Fälle, in denen dies notwendig ist, in 10% der Fälle findet aber eine Evakuierung statt, obwohl keine Überflutung eintritt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der vier Zustände A) - D). Ermitteln Sie, welches Kriterium die Feuerwehr bevorzugen wird.

7. **Sicherheitsäquivalent**

Ein Individuum habe ein Vermögen von 10 Geldeinheiten und die Nutzenfunktion $u(x) = \sqrt{x}$. Das Individuum kann an einer Lotterie teilnehmen, die mit Wahrscheinlichkeit 1/2 4 GE und mit der Gegenwahrscheinlichkeit 9 GE auszahlt.

(a) Was ist das Individuum maximal bereit zu zahlen, um an dieser Lotterie teilzunehmen? Vergleichen Sie diesen Wert mit der erwarteten Auszahlung der Lotterie.

(b) Zeigen Sie ihr Ergebnis in einem "Zustände der Welt" Diagramm. Wie würde sich die Graphik ändern, wenn das Individuum die Nutzenfunktion $u(x) = ax$, bzw. $u(x) = x^2$ hätte?

8. $\mu - \sigma$**–Theorie**

   Betrachten Sie eine quadratische Nutzenfunktion: $u(x) = a + bx + cx^2$

   a) Für welche Parameterwerte und für welche Einkommen x ist dies eine sinnvolle Nutzenfunktion für ein risikoaverses Individuum?

   b) Zeigen Sie, daß das Individuum nur an Ewartungswert und Varianz der Verteilung interessiert ist.

9. **St. Petersburg Paradox II**

   D. Bernoulli hat die Erwartungsnutzenfunktion als Reaktion auf das St. Petersburg Paradox eingeführt.

   a) Wie müßten die Auszahlungen sein, damit bei einer Nutzenfunktion $u(x) = \ln x$ der Erwartungsnutzen dieser Lotterie unendlich wird?

   b) Ist auch dies ein Paradox? Welche Konsequenz hat dies für die Ewartungsnutzenfunktion?