Maße des Risikos

Zuvor:

Wann ist Individuum A risikoaverser als Individuum B?

Heute:

Wann ist Lotterie I riskanter als Lotterie II?

Schnelle (und nicht ganz richtige) Antwort:

Falls $\sigma_I^2 > \sigma_{II}^2$ und $\bar{x}_I = \bar{x}_{II}$

(gleicher Mittelwert, größere Varianz)

Aber ... Gegenbeispiel:

I	II
$\left({}^7/_8 \;,\; {}^1/_8 \;;\; 1 \;,\; 9 \right)$	$\left({}^1/_2 \;,\; {}^1/_2 \;;\; 0 \;,\; 4 \right)$

$\bar{x}_I = {}^7/_8 \cdot 1 + {}^1/_8 \cdot 9 = 2 = {}^1/_2 \cdot 4 = \bar{x}_{II}$

$\sigma_I^2 = {}^7/_8\,(1 - 2)^2 + {}^1/_8\,(9 - 2)^2 = {}^7/_8 + {}^{49}/_8 = 7$

$\sigma_{II}^2 = {}^1/_2\,(0 - 2)^2 + {}^1/_2\,(4 - 2)^2 = 2^2 = 4$

$$\text{Betrachte}: u(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{I}: \quad E[u] = \frac{7}{8} \cdot \sqrt{1} + \frac{1}{8} \cdot \sqrt{9} = \frac{10}{8}$$

$$\text{II}: \quad E[u] = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} = 1 < \frac{10}{8}$$

dennoch: In "Mean-Varianz"-Modellen oder bei quadratischen Nutzenfunktionen gilt obiges Argument.

allgemeiner:

STOCHASTISCHE DOMINANZ

(Rothschild, Stiglitz, 1970, 1971)

$\boxed{\textbf{I riskanter als II, falls } E_I[u] \leq E_{II}[u]}$

- Alle Konzepte zum Risikovergleich starten mit diesem Vergleich.
- Sie unterscheiden sich "lediglich" darin, welche Beschränkungen für die Nutzenfunktionen u gelten.
- z.B. u $\in$ {Menge der quadr. NF}
  => I riskanter als II, falls $\bar{x}_I = \bar{x}_{II} \wedge \sigma_I^2 > \sigma_{II}^2$
- nota bene
  - Alle diese Konzepte sind nicht vollständig, d.h. $\exists$ Lotterien I, II s.d. weder I riskanter ist als II noch umgekehrt.
  - Aber diese Lotterieordnung ist transitiv.

Stochastische Dominanz der 1. Ordnung [FOSD]

u ∈ {Menge der Funktionen mit u´ ≥ 0}

Hier betrachtet man alle NF, die mehr Einkommen bevorzugen. Es wird keine Unterscheidung zwischen risikoaversen und risikoliebenden Personen getroffen.

$$E_{II}[u] \geq E_{I}[u]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_a^b u(x) f_{II}(x) dx \geq \int_a^b u(x) f_{I}(x) dx$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_a^b u(x)[f_{II}(x) - f_{I}(x)] dx \geq 0$$

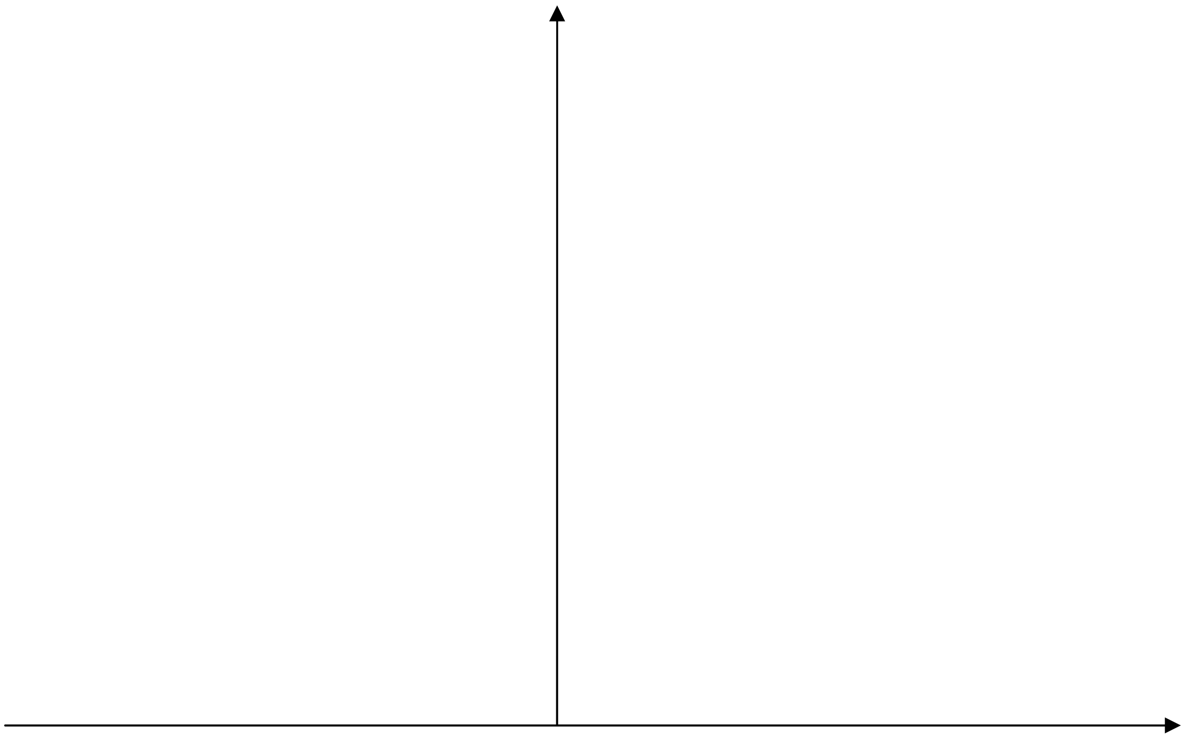
$$\Leftrightarrow$$

$$u(x)[F_{II}(x) - F_{I}(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)[F_{II}(x) - F_{I}(x)] dx \geq 0; \quad u'(x) > 0$$

Dies soll gelten für alle u(x) mit u´(x) > 0, insbesondere für "Stufenfunktionen": u´ klein fast überall, und u´ groß für $x = \hat{x}$.

=> $\boxed{\forall\ \hat{x} \in [a,b] \quad F_{I}(\hat{x}) \geq F_{II}(\hat{x})}$

Interpretation:



- Wahrscheinlichkeitsmasse verschiebt sich nach rechts.
- Man kann zeigen: II FOSD I => $E_{II}[x] \geq E_{I}[x]$
- $F[\hat{x}] = \text{prob}\ (x \leq \hat{x})$

  => für jedes $\hat{x}$ ist die Wahrscheinlichkeit, weniger als $\hat{x}$ zu erhalten, größer bei Lotterie I.

Stochastische Dominaz der 2. Ordnung [SOSD]

u $\in$ {Menge der Funktionen mit u´ $\geq$ 0, u´´ $\leq$ 0}

Hier werden nur risikoaverse Individuen betrachtet.

$$E_{II}[u] \geq E_{I}[u]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\ldots \text{(wie auf 4-3)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-\int_a^b u'(x)[F_{II}(x) - F_I(x)]dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-u'(x)T(x)\Big|_a^b + \int_a^b u''(x)T(x)dx \geq 0$$

$$\text{wobei } T'(x) = F_{II}(x) - F_I(x)$$

$$\Rightarrow T(x) = \int_a^x (F_{II}(y) - F_I(y))dy$$

$$\Rightarrow T(a) = 0, \qquad T(b) = ?$$

$u''(x) \leq 0$ und beliebig, Argumentation wie auf 4-3

$$\Rightarrow T(x) \leq 0 \quad (\Rightarrow \text{insbesondere } T(b) \leq 0)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \forall x \in [a,b] \quad \int_a^x (F_I(y) - F_{II}(y))dy \geq 0}$$

$\Rightarrow A \geq B$

$\Rightarrow A \geq B, \; A + C \geq B + D,$ usw.

Interpretation?

Betrachte $\bar{x}_I = \bar{x}_{II}$

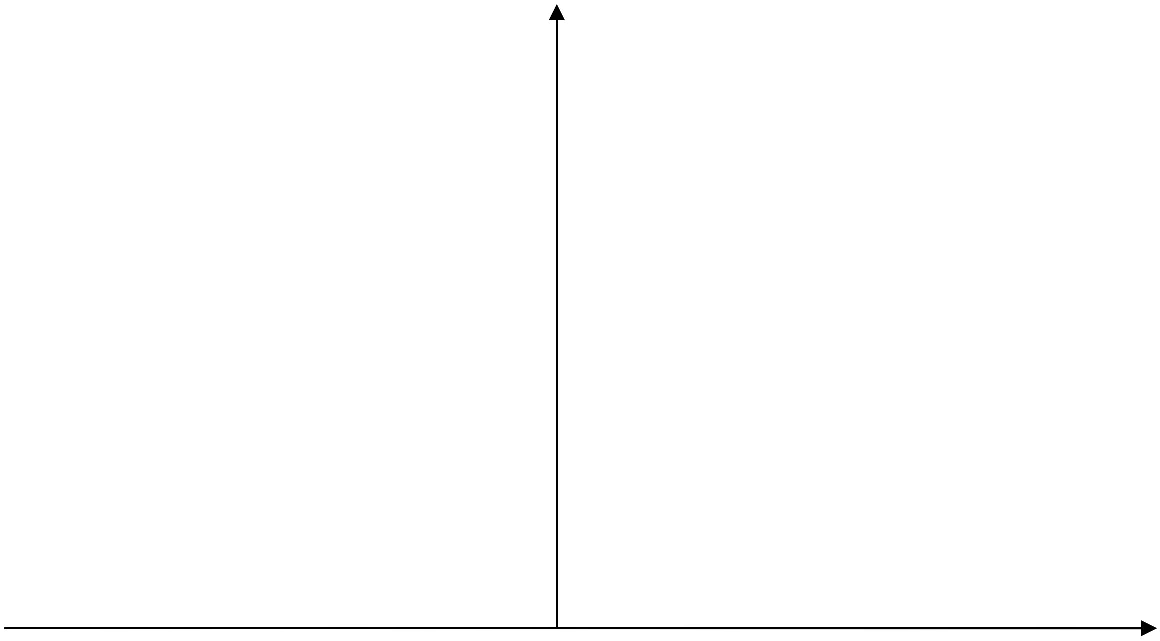
Beobachtung $\quad \bar{x} = \int_a^b (1 - F(x))dx - a$

Beweis $\quad \bar{x} = \int_a^b x \cdot f(x)dx$

$$= x \cdot (F(x) - 1)\Big|_a^b - \int_a^b (F(x) - 1)dx$$

$$= a + \int_a^b (1 - F(x))dx$$

Da $\bar{x}_I = \bar{x}_{II}$ => A = B und T(b) = 0 (4 - 5)



"Mean-Preserving Spread"

(erwartungswerterhaltende Spreizung)

Theorem: (Rothschild & Stiglitz, 1970)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Jedes risikoaverse Individuum bevorzugt Lotterie II zu Lotterie I $\wedge$ $\bar{x}_I = \bar{x}_{II}$

(ii) $\forall\, x \in [a,b] \quad \int_a^x \left(F_I(y) - F_{II}(y)\right) dy \geq 0 \;\wedge\; \int_a^b = 0$

(iii) I ist ein MPS von II

(iv) I ist gleich II plus "weißes Rauschen"

$y \rightarrow f_I(y) \qquad x \rightarrow f_{II}(x)$

=> $y = x + \varepsilon \wedge E[\varepsilon|x] = 0$

Beweis:

(i) ⇔ (ii): ✓

(ii) ⇔ (iii): per Definition

(iv) => (i):

- $E_y[y] = E_{x,\varepsilon}[x + \varepsilon] = E_x[E_\varepsilon\,[x + \varepsilon|x]] = E_x[x]$

  d.h. Mittelwert gleich

- $E_y\,[u(y)] = E_{x,\varepsilon}[u(x + \varepsilon)]$

  $= E_x[E_\varepsilon\,[u(x + \varepsilon)|x)]]$

  $\leq E_x[u(x + E_\varepsilon(\varepsilon|x))]$

  $= E_x[u(x)]$

(i) => (iv):

s. R & S

<u>Erweiterungen:</u>

- n^{th} order SD
- strong increases in risk (Meyer & Ormiston)
-
-

Zusammenfassung der bisherigen Resultate:

(i) $E[u] = \Sigma p_i u(x_i)$

(ii) Kritik : $"E[u]" = \sum_i v_i(\underline{p}) \cdot u(x_i)$

$$v_i(\underline{p}) = v(p_i) \text{ oder } \quad q(F_i) - q(F_{i-1})$$

(iii) $A(w) = -\dfrac{u''(w)}{u'(w)}$

$$R(w) = -\frac{wu''(w)}{u'(w)}$$

Individuum A risikoaverser als Individuum B, falls $\forall$ w: $A_A(w) \geq A_B(w)$.

(iv) FOSD: $F_I(x) \geq F_{II}(x)\ \forall\ x$

Alle Individuen mit $u' > 0$ bevorzugen II.

$$\text{SOSD}: \int_a^x F_I(y)dy \geq \int_a^x F_{II}(y)dy \quad \forall\ x$$

Alle risikoaversen Individuen ($u''<0$) bevorzugen II.

ab jetzt: Anwendungen!