Sem. für Versicherungswissenschaft
Tobias Böhm

Economics of Information and Uncertainty
SoSe 2006

PROBLEM SET 3 – **Problems for Chapters 5**

1. **Portfoliomodell**

   Ein Individuum habe eine logarithmische Nutzenfunktion und ein Anfangsvermögen von W. Dieses Vermögen kann in eine sichere Anlage mit Rendite i investiert werden, oder in eine unsichere Anlage mit Rendite $\tilde{x}$, wobei $\tilde{x}$ entweder gleich $\bar{x}$ ist (mit Wahrscheinlichkeit p) oder gleich $\underline{x}$ (mit Wahrscheinlichkeit $1-p$). Es gelte $\underline{x} < i < \bar{x}$. Der Erwartungswert sei μ.

   (a) Erläutern Sie das Maximierungsproblem des Individuums.

   (b) Ermitteln Sie den optimalen Betrag a^*, den das Individuum in das riskante Projekt investieren wird. (Nach einigen Unformungen ergibt sich ein linearer Ausdruck in a^*.

   (c) Zeigen Sie, unter welchen Bedingungen a^* größer bzw. kleiner Null ist.

   (d) Zeigen Sie, daß a^* steigt, falls das Anfangsvermögen steigt. Was hat dies mit dem Maß der absoluten Risikoaversion zu tun? Wie ändert sich der Anteil des Vermögens, der in das riskante Projekt investiert wird, wenn das Vermögen steigt? Warum?

   (e) Nehmen Sie an, $\underline{x}$ falle und $\bar{x}$ steige, wobei der Erwartungswert konstant bleibt. Zeigen Sie, daß a^* in diesem Falle fällt. (Diese Form der Risikoänderung nennt man auch 'strong increase in risk'.)

2. **Versicherungsverträge**

   (a) Ein Individuum möchte sich gegen Feuer versichern. Das Feuer verursacht einen Schaden in Höhe von L, wobei L gleichverteilt im Intervall $[0, L_m]$ ist. Für eine gegebene Prämie P stehen nun zwei Versicherungsverträge zur Auswahl:
   i) ein Teilversicherungsvertrag, d.h. die Deckungshöhe ist ein prozentualer Anteil der Schadenshöhe ($I = \alpha L$) oder

ii) ein Vertrag mit Selbstbehalt, d.h. $I = 0$ für $L < D$ und $I = L - D$ für $L > D$ (D = Deductible). Das erwartete Endvermögen des Individuums sei unter beiden Verträgen gleich.

Zeigen Sie, dass jedes risikoaverse Individuum den Vertrag mit Selbstbehalt bevorzugen wird.

(b) Betrachten Sie nun ein Individuum, dass sich zwei Zuständen der Welt gegenübersieht: mit Wahrscheinlichkeit p tritt ein Schaden L auf, den das Individuum allerdings gegen die faire Prämie P voll versichern kann; mit der Gegenwahrscheinlichkeit erleidet das Individuum keinen Schaden. Die Versicherung überlegt nun, einen stochastischen Versicherungsvertrag einzuführen, der im Schadensfall mit Wahrscheinlichkeit 0.5 nichts auszahlt, mit der Gegenwahrscheinlichkeit allerdings das Doppelte des Schadens deckt (die Prämie P ist bei beiden Verträgen gleich).

Welchen Vertrag wird ein risikoaverses Individuum vorziehen?

3. **Produktionsentscheidung bei Preisunsicherheit**

Eine Unternehmerin habe eine logarithmische Nutzenfunktion. Ihr Anfangsvermögen sei 100. Das Unternehmen produziere ein Gut a mit Grenzkosten von 5. Bei $a = 20$ sei die maximale Kapazität des Unternehmens erreicht. Die Fixkosten der Produktion seien $B = 2$. Bei ungünstigen Marktbedingungen (mit Wahrscheinlichkeit 50%) sei der Preis des Gutes 3, ansonsten sei er 9.

a) Formulieren Sie den Erwartungsnutzen der Unternehmerin und ermitteln Sie die optimale Produktionsmenge.

b) Zeigen Sie, daß ein Anstieg der Fixkosten (von 2 auf 3) zu einer Reduktion der optimalen Produktionsmenge führt. Warum?

c) Wie groß wäre die Produktionsmenge, wenn ein sicherer Preis von 6 vorliegen würde?

d) Nun sei folgende Unsicherheit gegeben: $p = 4$ mit Wahrscheinlichkeit 50% und $p = 8$ mit derselben Wahrscheinlichkeit. Wie groß ist nun die Produktionsmenge? Erklären Sie dieses Ergebnis intuitiv.

e) Die Unternehmerin habe nun die Möglichkeit, in eine flexiblere Technologie zu investieren. Diese Technologie erlaubt ihr, die Produktionsmenge erst nach der Realisierung des Outputpreises festzulegen. Wie groß ist nun die Produktionsmenge bei $p = 3$ ($p = 9$)? Wieviel wäre die Unternehmerin maximal bereit, für diese neue Technologie zu zahlen?

4. **Termingeschäfte**

Eine Unternehmerin habe eine logarithmische Nutzenfunktion. Ihr Anfangsvermögen sei 100. Das Unternehmen produziere ein Gut a mit Grenzkosten von 5. Bei $a = 20$ sei die maximale Kapazität des Unternehmens erreicht. Die Fixkosten der Produktion seien $B = 2$. Bei ungünstigen Marktbedingungen (mit Wahrscheinlichkeit 50%) sei der Preis des Gutes 3, ansonsten sei er 9. Die Unternehmerin habe nun zusätzlich Zugang zu einem Terminbörse, auf der ihr Gut zu einem Preis (p_t) von 7 gehandelt wird. (Auf einer Terminbörse (Futures-Markt) kann man Güter, die erst zu einem späteren Zeitpunkt geliefert werden müssen, kaufen oder verkaufen.)

a) Zeigen Sie, dass in diesem Falle die optimale Produktionsmenge bei der Kapazitätsgrenze liegt. (Im allgemeinen gilt hier ein 'Separations'-Theorem: die optimale Produktionsmenge wird so bestimmt, daß Grenzkosten gleich dem Termin-Preis sind. D.h., die Unsicherheit spielt bei der Bestimmung der Produktionsmenge keine Rolle.)

b) Welche Menge von Gütern wird das Unternehmen auf dem Future-Markt anbieten, wieviel auf dem tatsächlichen Markt (Spot-Markt)?

c) Lösen Sie a) und b) erneut unter der Annahme, daß $p_t = 5,5$ sei.