1. ERWARTUNGSNUTZENTHEORIE

John von Neumann und Oskar Morgenstern entwickeln einen axiomatischen Formalismus der Erwartungsnutzentheorie (1944).

Betrachte eine Menge von Lotterien

$\{L_1, \ldots, L_n\} \equiv L$.

Trick: Gegeben sei außerdem eine Standardlotterie

$(1-u, u; x_{min}, x_{max})$

maximale Auszahlung

Wahrscheinlichkeit von x_{min}

minimale Auszahlung

(i) Ordnungsaxiom

Es existiert eine vollständige Präferenzordnung über die Menge der Lotterien:

Vollständigkeit:

$$L_i, L_j \in L \quad \Rightarrow \quad L_i \geq L_j \quad \text{oder} \quad L_i \leq L_j$$

Transitivität:

$$L_i, L_j, L_k \in L$$

$$L_i \geq L_j \quad \wedge \quad L_j \geq L_k \quad \Rightarrow \quad L_i \geq L_k$$

Reflexivität:

$$L_i \in L : \; L_i \geq L_i$$

(ii) Präferenz über Wahrscheinlichkeiten

(ähnlich dem Nichtsättigungsaxiom, oder „je höher desto besser")

Gegeben:

$$L_i^0 = (1-u_i, u_i; x_{min}, x_{max})$$

$$L_1^0 \geq L_2^0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 \geq u_2$$

(iii) Stetigkeitsaxiom

$\forall x$ mit $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ $\exists u$ s.d.

$x \sim (1-u, u; x_{min}, x_{max})$

Nenne dieses $u : u(x)$

Beispiel :

$x_{min} = 0, \quad x_{max} = 10.000, \quad x = 1.000$

$\Rightarrow$ 1.000 sicher ist genauso gut wie 10.000 mit Wahrscheinlichkeit $u(1.000)$.

(iv) Unabhängigkeitsaxiom

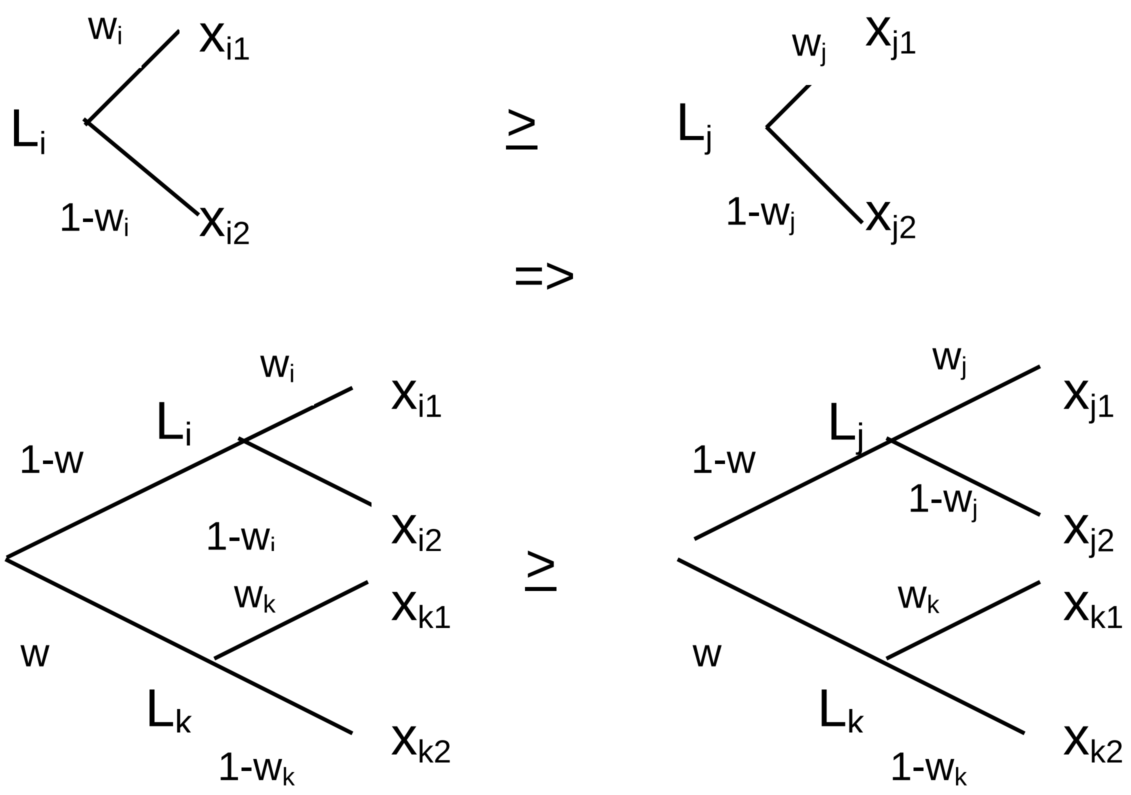
$L_i, L_j, L_k \in L \quad \wedge \quad L_i \geq L_j$

$\Rightarrow \quad \forall \omega \; (1-\omega, \omega; L_i, L_k) \quad \geq \quad (1-\omega, \omega; L_j, L_k)$

Dies setzt voraus:

- Agenten wissen, was zusammengesetzte Lotterien sind (Lotterien über Lotterien)
- Agenten wissen, daß es keine Komplementäreffekte zwischen Lotterien gibt

Beispiel:



THEOREM:

Gegeben die Axiome (i) - (iv), so verhält sich der Entscheidungsträger, als ob er die von Neumann-Morgensternsche Nutzenfunktion maximiert.

v.N.-M.: $U(L_i) = w_i\, u(x_{i1}) + (1-w_i)\, u(x_{i2})$

(ermittelt via Axiom (iii))

wobei $L_i = (w_i, 1-w_i; x_{i1}, x_{i2})$

Beweis:

Trick: Für jede Lotterie suche eine Standardlotterie, die genauso gut ist. Dann muß man nur noch die Wahrscheinlichkeiten nach Axiom (ii) vergleichen.

$L = (1\text{-}w, w; x_1, x_2)$

Gesucht: U(L) so daß

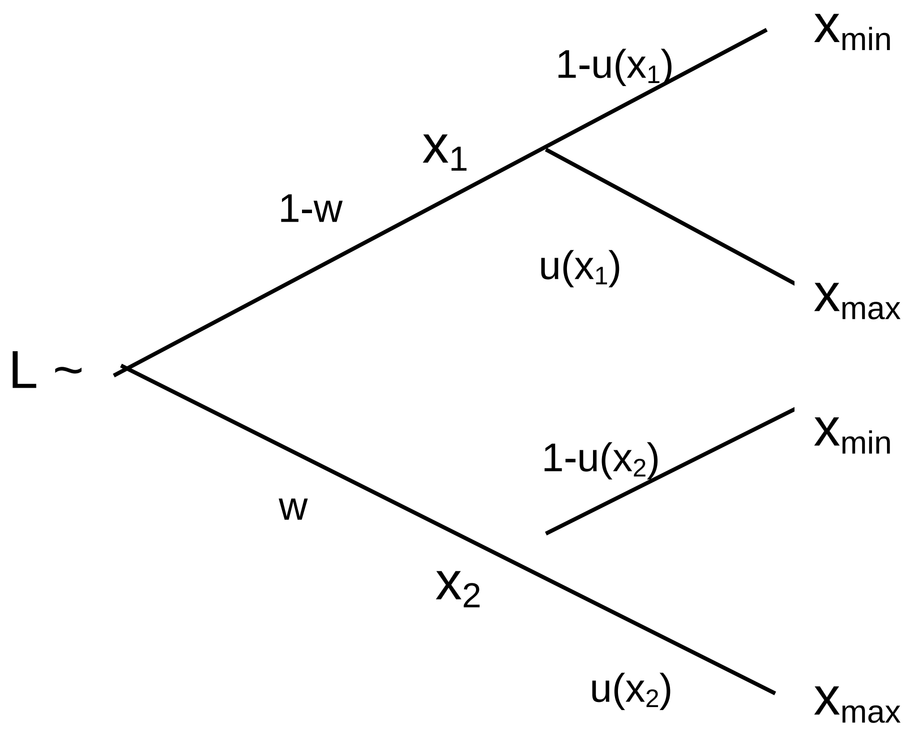
$$L \sim (1\text{-}U(L), U(L) ; x_{min}, x_{max})$$

Axiom (iii): $x_1 \sim (1\text{-}u(x_1), u(x_1) ; x_{min}, x_{max}) \equiv l(x_1)$

Axiom (iv): $L \sim (1\text{-}w, w ; l(x_1), x_2)$

erneut: $L \sim (1\text{-}w, w ; l(x_1), l(x_2))$

dies ist bereits eine Standardlotterie



addiere die Wahrscheinlichkeiten:

x_{max}: $w \cdot u(x_2) + (1\text{-}w) \cdot u(x_1)$

x_{min}: $w \cdot (1\text{-}u(x_2)) + (1\text{-}w) \cdot (1\text{-}u(x_1))$

$= 1 - [w \cdot u(x_2) - (1\text{-}w) \cdot u(x_1)]$

vergleiche: $L \sim (1\text{-}U(L), U(L); x_{min}, x_{max})$

=> $U(L) = w \cdot u(x_2) + (1\text{-}w) \cdot u(x_1)$

<u>Eigenschaften der von Neumann-Morgensternschen Erwartungsnutzenfunktion:</u>

(i) u(x) ist eindeutig bis auf eine positive, lineare Transformation:

$v(x) = a + b\,u(x) \qquad b > 0$

=> u ist eine kardinale Nutzenfunktion (Bernoulli Nutzenfunktion)

(ii) U(L) kann beliebig (monoton) transformiert werden:

z.B. $U(L) = \sum p_i u(x_i)$

$V(L) = \exp[\sum p_i u(x_i)]$

=> U(L) ist eine ordinale Nutzenfunktion.

Weitere Annahmen:

(i) u(x) ist differenzierbar: $u'(x) > 0$

(ii) u(x) ist eine konkave Funktion: $u''(x) < 0$

$\Leftrightarrow$

der Agent ist risikoavers !

Warum risikoavers?

E[x]: Erwartungswert der Lotterie $(1-p, p; x_1, x_2)$

E[u]: Erwartungsnutzen = U(L)

U(E[x]): Nutzen der sicheren Auszahlung E[x]
Im allgemeinen gilt JENSENS UNGLEICHUNG:

Für jede konkave Funktion gilt:

$$E[u(x)] \leq u(E[x])$$

oder

$$U(L) = \sum p_i u(x_i) \leq u(\sum p_i x_i)$$

oder

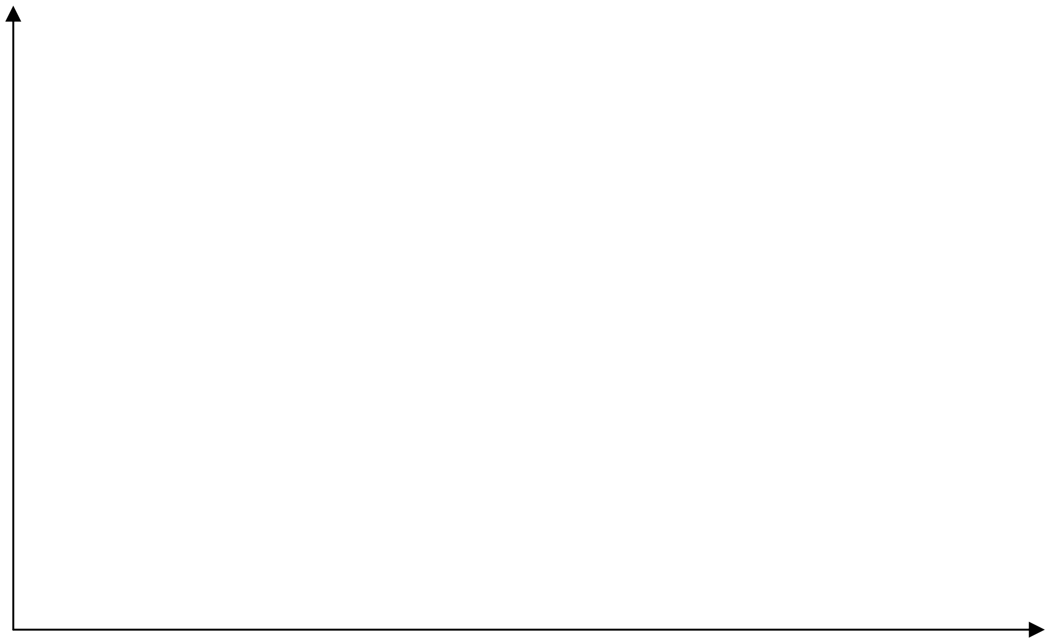
$$\int u(x)f(x)dx \leq u(\int xf(x)dx)$$

[Beweis: siehe Übung]

Betrachte simple Lotterie:

$L = (1-p, p ; x_1, x_2)$

Indifferenzkurven in einem „Zustände der Welt“Diagramm:



$$\bar{u}(x_1, x_2) = (1-p)u(x_1) + pu(x_2)$$

$$d\bar{u} = (1-p)u'(x_1)dx_1 + pu'(x_2)dx_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{(1-p)u'(x_1)}{pu'(x_2)} = GRS$$

(1) $$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = -\frac{1-p}{pu_2'}\left[u_1'' + \frac{1-p}{p}\left(\frac{u_1'}{u_2'}\right)^2 u_2''\right] > 0$$

$\Rightarrow$ streng konvexe Indifferenzkurven

(2) $x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{1-p}{p}$

(3) risikoneutral (Erwartungswertmaximierer)

$\bar{u} = (1-p)x_1 + px_2$

$\Rightarrow u(x) = x \qquad \Rightarrow \dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{1-p}{p}$

(4) Maximinkriterium: $\bar{u} = \min(x_1, x_2)$