Sem. für Versicherungswissenschaft
Tobias Böhm

Economics of Information and Uncertainty
SoSe 2006

Aufgabenblatt 5

1. **Effiziente Grenze im CAPM**

   In einer Ökonomie gebe es drei Wertpapiere. Der erwartete Return des ersten Wertpapieres sei 1, die anderen beiden haben eine erwartete Auszahlung von 2. Die Varianz-Kovarianz-Matrix ist gegeben durch

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass ein Portfolio, dass denselben Anteil von Wertpapier 2 und 3 hält ($a_2 = a_3$), nicht effizient sein kann. (Tip: Zeigen Sie, dass ein Anstieg in a_3 bei gleichzeitiger Reduktion von a_2 die erwartete Auszahlung des Portfolios nicht verändert, die Varianz aber verringert.)

   (b) Berechnen Sie das effiziente Portfolio, wenn der Investor eine erwartete Auszahlung von 1,5 haben möchte.

2. **Informationsökonomie**

   Michael Schumacher startet in Monte Carlo. Die Wetteraussichten sind schlecht, so dass alle seine Konkurrenten Regenreifen aufgezogen haben. Unmittelbar vor dem Start bekommt Ferrari die Möglichkeit, aktuelle Wetterdaten zu bekommen, was das Team aber 2000 Euro kosten würde.

   Nehmen Sie an, es gibt zwei Zustände der Welt, gutes Wetter (z_1) und schlechtes Wetter (z_2) und zwei Signale, s_1 (die Sonne kommt durch) und s_2 (es bleibt regnerisch). Die Matrix der gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten ($Pr(s_i \wedge z_j)$) sei

	s_1	s_2
z_1	$0,2$	$0,1$
z_2	$0,1$	$0,5$

Schumacher hat zwei Aktionen zur Auswahl: er kann entweder Trockenreifen (a_1) oder Regenreifen (a_2) aufziehen. Abhängig vom Zustand der Welt erhält er folgende Auszahlungen

	z_1	z_2
a_1	45000	0
a_1	20000	20000

(a) Ermitteln Sie die Matrix der a - posteriori Wahrscheinlichkeiten (, d.h. $Pr(z_j|s_i)$).

(b) Zeigen Sie, dass Schumacher ohne Signal mit Regenreifen fahren wird.

(c) Wieviel ist das Signal wert? Wird Ferrari die 2000 Euro bezahlen?

3. **Informationsökonomie - Flexibilitätsoption**
Die Tour de Bavaria hat soeben begonnen. Der Fahrer eines der Teams, Fahrer A zeigt am zweiten Tag einen Leistungsabfall, er ist nur zehnter des Klassements. Das Team hat noch einen zweiten Fahrer, B, der zwar jung und unerfahren ist, im Gesamtklassement allerdings auf Platz 2 liegt. Die Leitung des Teams hat folgende Handlungsmöglichkeiten:
a_1: Fahrer A als Favouriten fahren zu lassen, d.h. alle anderen Fahrer des Teams müssen ihn unterstützen und dürfen selber nicht gewinnen.
a_2: Fahrer B als Favouriten einsetzen.
Nehmen Sie an, es gibt zwei Zustände der Welt, Fahrer A hat eine schwere Grippe (z_1) oder eine leichte Grippe (z_2). Wenn das Team noch einen Tag wartet, erhält es eins von zwei möglichen Signalen, nämlich Fahrer A ist schlecht gefahren (s_1) oder Fahrer A ist gut gefahren (s_2). Die Matrix der gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten sei

	s_1	s_2
z_1	$0,2$	$0,1$
z_2	$0,2$	$0,5$

Weterhin gelten die folgenden Auszahlungen

	z_1	z_2
a_1	1000	10000
a_2	7000	7000

(a) Ermitteln Sie die Matrix der a - posteriori Wahrscheinlichkeiten.

(b) Welcher Fahrer wird als Favourit nominiert, wenn der Teamchef keinen weiteren Tag warten will?

(c) Wenn der Teamchef einen weiteren Tag wartet, verliert er 500 Euro an Werbeeinnahmen. Wird er einen weiteren Tag warten? Welchen Verlust würde er maximal in Kauf nehmen?

(d) Der Hauptsponsor von Fahrer B bietet dem Teamchef 450 Euro, falls er Fahrer B schon heute als Favouriten nominiert. Wie wird sich der Teamchef jetzt verhalten?

4. Alte Klausuraufgabe

Betrachten Sie ein Individuum, das sich zwei Zuständen der Welt gegenübersieht (z_1 und z_2) und zwei mögliche Aktionen zur Auswahl hat (a_1 und a_2). Die Auszahlungen sind gegeben durch folgende Matrix:

	z_1	z_2
a_1	50	20
a_2	20	40

Das Individuum kann sich bei seiner Entscheidung auf ein Signalsystem stützen. Es gibt zwei mögliche Realisierungen des Signals, s_1 und s_2. Die Matrix der **gemeinsamen** Wahrscheinlichkeiten (Prob($s_i \wedge z_j$)) ist gegeben durch

	s_1	s_2
z_1	0,4	0,1
z_2	0,2	0,3

(a) Wie hoch ist der erwartete Gewinn des Individuums, wenn es kein Signal einholt? (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Matrix der a-posteriori Wahrscheinlichkeiten! Welchen Betrag ist das Individuum maximal bereit, für das Signal zu zahlen? (5 Punkte)

(c) Nehmen Sie nun an, dass das Individuum die Qualität des Signals selbst bestimmen kann. Die Matrix der **a-posteriori** Wahrscheinlichkeiten (Prob($z_j|s_i$)) ist nun gegeben durch

	s_1	s_2
z_1	$\frac{2}{3}$	$1-b$
z_2	$\frac{1}{3}$	b

b muss schwach größer sein als $\frac{1}{2}$ (d.h. $b \geq \frac{1}{2}$) und ist der Parameter, den das Individuum wählen kann. Gehen Sie davon aus, dass die gleichen **a-priori** Wahrscheinlichkeiten wie in Aufgabe (a) und (b) gelten.
Welchen Wert b muss das Individuum mindestens wählen, damit dieses Signalsystem **potenziell** einen positiven Wert hat? (4 Punkte)

(d) Nehmen Sie nun an, das Signalsystem verursacht Kosten in Höhe von entweder

i. $C_1(b) = 16(b - \frac{1}{2})^2$ oder

ii. $C_2(b) = 50(b - \frac{1}{2})^2$

Welchen Wert von b wird das Individuum in beiden Fällen wählen? Berechnen Sie die erwarteten Gewinne des Individuums in beiden Fällen! (9 Punkte)