Allokation des Risikos

(1) Effiziente Risikoverteilung

2 Individuen 1 , 2

2 Zustände der Welt a , b (Wahrs. p, 1-p)

Ausgangsvermögen $w_{01}(a)$, $w_{01}(b)$

$w_{02}(a)$, $w_{02}(b)$

Sozialplaner:

$$\max \quad p \cdot u_1(w_{f1}(a)) + (1-p) \cdot u_1(w_{f1}(b))$$

s.t.

$$p \cdot u_2(w_{f2}(a)) + (1-p) \cdot u_2(w_{f2}(b)) \geq \bar{u}$$

$$w_{f1}(a) + w_{f2}(a) \leq w_{01}(a) + w_{02}(a) \equiv w_0(a)$$

$$w_{f1}(b) + w_{f2}(b) \leq w_0(b)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\max \quad p \cdot u_1(w_0(a) - w_{f2}(a)) + (1-p) \cdot u_1(w_0(b) - w_{f2}(b))$$

s.t.

$$p \cdot u_2(w_{f2}(a)) + (1-p) \cdot u_2(w_{f2}(b)) \geq \bar{u}$$

$$\text{Lagrange:} \quad L = E[u_1] + \lambda[E[u_2] - \bar{u}]$$

$$\frac{d}{dw_{f2}(a)}: -p\cdot u_1'\overset{\substack{w_0(a)-w_{f2}(a)\\ \downarrow}}{(a)}+p\cdot \lambda u_2'\overset{\substack{w_{f2}(a)\\ \downarrow}}{(a)}=0$$

$$\frac{d}{dw_{f2}(b)}: -(1-p)\cdot u_1'(b)+(1-p)\cdot \lambda u_2'(b)=0$$

$$\Rightarrow \frac{p\cdot u_1'(a)}{(1-p)\cdot u_1'(b)}=\frac{p\cdot u_2'(a)}{(1-p)\cdot u_2'(b)}$$

allgemein:

Borch-Bedingung:
Eine Risikoallokation ist Pareto-effizient, wenn die Grenzrate der Substitution zwischen Einkommen im Zustand s und Einkommen im Zustand t für alle Individuen dieselbe ist.

$$GRS_{st}^{i}=GRS_{st}^{j}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{p_s\cdot u_i'(w_{fi}(s))}{p_t\cdot u_i'(w_{fi}(t))}=\frac{p_s\cdot u_j'(w_{fj}(s))}{p_t\cdot u_j'(w_{fj}(t))}$$

Edgeworth-Diagramm:

Bei optimaler Aufteilung haben beide Parteien ein Einkommensrisiko, falls

- *soziales Risiko* vorliegt und
- beide Individuen risikoavers sind.

ohne soziales Risiko:

Eine Partei ist risikoneutral: (Indiv. 2)

$$\frac{p \cdot u_1'(a)}{(1-p) \cdot u_1'(b)} = \frac{p \cdot u_2'(a)}{(1-p) \cdot u_2'(b)} = \frac{p}{1-p}$$

$$\Rightarrow u_1'(a) = u_1'(b) \Rightarrow w_{f1}(a) = w_{f1}(b)$$

Das risikoneutrale Individuum übernimmt das gesamte Risiko.

Theorem: ***Das Gegenseitigkeitsprinzip***

Eine Pareto-effiziente Risikoverteilung hat die Eigenschaft, daß das Endvermögen jedes Individuums nur vom Gesamtvermögen der Gesellschaft in dem jeweiligen Zustand der Welt abhängt, d.h.

$$w_{fi}(s) = F_i(w_0(s))$$

Beweis:

$$\text{zu zeigen: Falls } \quad w_0(s) = w_0(t)$$
$$\Rightarrow w_{fi}(s) = w_{fi}(t) \qquad \forall i$$

$$\text{Ann: } \quad \exists i \text{ s.d. } w_{fi}(s) > w_{fi}(t)$$

$$\text{Borch-Bedingung: } \frac{p_s \cdot u_i'(s)}{p_t \cdot u_i'(t)} = \frac{p_s \cdot u_j'(s)}{p_t \cdot u_{ji}'(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \forall j \quad w_{fj}(s) > w_{fj}(t)$$

$$\Rightarrow w_0(s) = \sum_j w_{fj}(s) > \sum_j w_{fj}(t) = w_0(t) \qquad \lightning$$

Bsp.:

- Versicherungsverein auf Gegenseitigkeit
- Kibbutz

Bem.: Falls kein soziales Risiko existiert, so sind alle Individuen voll versichert.

$[w_0(s) = w_0(t) \quad \forall\, s, t \quad \Rightarrow \quad w_{fi}(s) = w_{fi}(t) \quad \forall\, s, t]$

Frage: Wie ändert sich $F_i(w_0(s))$, wenn sich $w_0(s)$ ändert, d.h. wer trägt wieviel von dem Risiko?

2 Individuen:

$u_1'(s) = \lambda\, u_2'(s) \quad \forall\, s$

d.h. $u_1'(F_1(w_0)) = \lambda\, u_2'(F_2(w_0))$ (*)

Beachte: Hier wird w_0 als kontinuierliche Variable betrachtet.

$$\frac{d}{dw_0}: \quad u_1''(F_1(w_0)) \cdot F_1'(w_0) = \lambda \cdot u_2''(F_2(w_0)) \cdot F_2'(w_0)$$

$$:(*): \quad F_1'(w_0) \cdot \frac{u_1''(.)}{u_1'(.)} = F_2'(w_0) \cdot \frac{u_2''(.)}{u_2'(.)}$$

$$\Rightarrow \quad A_1(F_1(w_0)) \cdot F_1'(w_0) = A_2(F_2(w_0)) \cdot F_2'(w_0)$$

$$\text{Beachte:} \quad F_1'(w_0) + F_2'(w_0) = 1 = \frac{dw_0}{dw_0}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 \cdot F_1' = A_2 \cdot (1 - F_1')$$

$$\Rightarrow \quad F_1'(w_0) = \frac{A_2}{A_1 + A_2} = \frac{A_1^{-1}}{A_1^{-1} + A_2^{-1}} = \frac{T_1(w_{f1})}{T_1(w_{f1}) + T_2(w_{f2})}$$

allgemein:

$$\frac{dw_{fi}}{dw_0} = \frac{T_i(w_{fi})}{\sum_{j=1}^{n} T_j(w_{fj})} \qquad \left(0 < \frac{dw_{fi}}{dw_0} < 1 \ \text{ falls } \ T_i \geq 0 \right)$$

Das Endvermögen eines Individuums reagiert umso stärker auf Änderungen des Gesamtvermögens, d.h. es erleidet einen größeren Anteil des sozialen Risikos, umso größer seine Risikotoleranz ist.

Beachte:
- kein soziales Risiko => w_0 = konstant
- Indiv. 2 risikoneutral

=> $T_2 = \infty$

=> $\frac{dw_{f1}}{dw_0} = \frac{T_1}{\infty} = 0$

=> Indiv. 1 ist voll versichert.

Sonderfälle:

1. Ein Indiv. k ist risikoneutral

   => $w_{fi}\left(w_0\right) = \overline{w}_{fi}$, konstant $i \quad k$

   $w_{fk}\left(w_0\right) = \overline{w}_{fk} + w_0$

2. $A_1 = a_1$, konstant $\quad$ $(A_i = a_i$, konstant (CARA))

   => $\dfrac{dw_{fi}}{dw_0} = \text{konstant}$

   => $w_{fi}\left(w_0\right) = a_i + b_i w_0$ (lineare Teilungsregel)

3. für zu Hause: $u_i\left(w_f\right) = w_{fi} - \beta_i w_{fi}^2$

   => auch lineare Teilungsregel

n.b. im allgemeinen wird das Endvermögen nicht linear aufgeteilt.

Bisher :

Borch – Bedingung: $\forall s,t \qquad \forall i,j$

$$\frac{p_s \cdot u_i'(w_{fi}(s))}{p_t \cdot u_i'(w_{fi}(t))} = \frac{p_s \cdot u_j'(w_{fj}(s))}{p_t \cdot u_j'(w_{fj}(t))}$$

$\Rightarrow$ Gegenseitigkeitsprinzip:

$$\begin{aligned} w_{fi}(s) &= F_i(w_0(s)) \\ &= F_i\left(\sum_j w_{0j}(s)\right) \end{aligned}$$

(oder: $w_0(s) = w_0(t) \Rightarrow \forall i \quad w_{fi}(s) = w_{fi}(t)$)

Heute:

- Können Märkte dieses Pareto-effiziente Ergebnis erzielen?
- Was ändert sich, falls auch Produktionsentscheidungen berücksichtigt werden?
- Aktienmarkt als Markt für zustandsabhängige Einkommen
- unvollständige Märkte

Arrow-Wertpapiere: a_s

Auszahlung: \$ 1 in Zustand der Welt 's'

Marktpreis: q_s

Wobei: $\sum_s q_s = 1$ (nur, falls nicht diskontiert wird)

Jedes Individuum maximiert:

$$E[u] = \sum_s p_s u(x_{fi}(s))$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_s q_s (x_{fi}(s) - x_{0i}(s)) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad p_s u'(x_{fi}(s)) - \lambda_i q_s = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_s u'(x_{fi}(s))}{p_t u'(x_{fi}(t))} = \frac{\lambda_i q_s}{\lambda_i q_t} = \frac{q_s}{q_t}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Borch} - \text{Bedingung!}$$

? Woher kommen die q_s ?

Im Gleichgewicht sind die q_s s.d.

$$\sum_i (x_{fi}(s) - x_{0i}(s)) \leq 0$$

Beachte: falls nur ein risikoneutrales Individuum im markt ist, so gilt $q_s = p_s \ \forall s$ (fairer Preis)

Bemerkung: Mehrere Güter => 'contingent claims': q_{es} (Preis von Gut 'e' in Zustand 's')

$$\max \sum_s p_s u\left(x_{fi}^1(s), x_{fi}^2(s), \ldots\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_s \sum_e q_{es}\left(x_{fi}^e(s) - x_{0i}^e(s)\right) \leq 0$$

$$p_s u_1(\ldots) - \lambda_i q_{1s} = 0 \qquad \text{etc.}$$

Bemerkung: Dasselbe Ergebnis kann erreicht werden, falls nur Arrow-Wertpapiere existieren, und Güter erst nach Realisation des Zustands gehandelt werden. Dies setzt voraus, daß Indiv. schon heute die Preise der Güter kennen.

Unternehmen:

Investition in Höhe von a, Gewinn:

$$\pi_j(a) = \sum_s \sum_e q_{se} f_{je}(a, s) - a$$

Zustände d. Welt — Güter — Output 'e' der Firma 'j' im Zustand 's' bei Investition 'a'

Beachte:

(i) Der Gewinn des Unternehmens ist sicher, es handelt schon heute zustandsabhängige Güter.

(ii) Jeder Aktieninhaber würde dasselbe 'a' wählen, nämlich jenes, welches $\pi_j(a)$ maximiert. (Einstimmigkeit der Entscheidung)

Fazit:

1. Wohlfahrtstheorem:

Ein vollständiger Markt mt Arrow-Wertpapieren führt zu einer Pareto-effizienten Allokation des Risikos.

? Wo sind die Märkte für 'Arrow-Wertpapiere' ?

Antwort: z.B. die Börse, Versicherungsmärkte, ...

Wertpapier P_j (Wert des Wertp.) mit Auszahlung π_{js}

Arbitrage Argument:

$$P_j = \sum_s q_s \pi_{js}$$

$$= \begin{pmatrix} \pi_{j1} & \pi_{j2} & \ldots & \pi_{js} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ . \\ q_S \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ . \\ . \\ . \\ P_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & . & \pi_{1S} \\ \pi_{11} & . & . & \pi_{2S} \\ . & . & . & . \\ \pi_{j1} & . & . & \pi_{jS} \\ . & . & . & . \\ \pi_{J1} & . & . & \pi_{JS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ . \\ . \\ . \\ q_S \end{pmatrix}$$

$$\underline{P} = \underline{\underline{\pi}} \; \underline{q}$$

benötige: $\underline{\underline{\pi}}$ ist invertierbar $\Rightarrow \underline{q} = \underline{\underline{\pi}}^{-1} \underline{P}$

Theorem: Falls die Anzahl der ***linear unabhängigen*** Wertpapiere gleich der Anzahl der Zustände der Welt ist, so ist der Wertpapiermarkt effizient, d.h. Arrow-Wertpapiere können repliziert werden.

Bsp: 2 Zustände der Welt:
2 Aktien

	z_1	z_2	Preis
b_1	10	-2	2,5
b_2	-1	15	9

$$\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{148} \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad q_1 = \frac{55{,}5}{148} \qquad q_2 = \frac{92{,}5}{148}$$

$$\text{Arrow - Wertpapiere:} \qquad a_1 = \frac{15}{148} b_1 + \frac{2}{148} b_2$$

$$a_2 = \frac{1}{148} b_1 + \frac{10}{148} b_2$$

Bem.:

(i) i.a. sind 'short sales' notwendig: $a = - a_1 b_1$ ...

(ii) lineare Unabhängigkeit ist notwendig:
b_1: 2, -1
b_2: -2, 1

Unvollständige Märkte

		z_1	z_2
2 Zustände der Welt:			
1 Wertpapier	b_1	3	1

Jedes Individuum hat einen Anteil λ_i an der Firma (b_1). Somit ist der individuelle Erwartungsnutzen:

$$E[u_i] = p \cdot u(w_{fi}(1)) + (1-p) \cdot u(w_{fi}(2))$$

$$\text{s.t.} \quad w_{fi}(1) = w_{0i}(1) + \lambda_i \cdot 3$$

$$w_{fi}(2) = w_{0i}(2) + \lambda_i \cdot 1$$

$$\text{i.a.} \quad GRS^i_{1,2} \neq GRS^j_{1,2}$$

Kann der Markt 'vollständig' gemacht werden? eventuell, mit Hilfe eine 'Call'-Option:

Option mit 'strike' Preis 2, dann ist die Auszahlung

	z_1	z_2
o_1	1	0

b_1 & o_1 bilden einen vollständigen Markt.

aber: Bei variabler Produktionsentscheidung ist das Problem des Managers nicht wohl definiert, Eigentümer sind sich uneinig über die optimale Produktion => großes Problem der Theorie!

Das CAPM-Modell

Annahmen:

- das Ausgangsvermögen ist sicher
- der Produktionssektor hat riskante Gewinne
- ***Individuen benutzen das 'Mean-Varianz' Kriterium, um ihre Entscheidungen bei Ungewißheit zu treffen!***

Motivation

- quadratische Nutzenfunktionen
- normalverteilte Gewinne der Firmen
- allgemeiner: bivariable Vert. der Gewinne

Modell:

$$\text{J Firmen, Preis}: p_j \quad \text{Gewinn}: \tilde{q}_j$$

$$\text{Def.}: \quad \tilde{r}_j = \frac{p_j}{\tilde{q}_j} \quad \text{(rate of Return)}$$

$$\text{N Individuen, Ausgangsvermögen}: w_{0i}$$

$$\text{Nutzenfkt.}: \quad E[u(\tilde{w}_{if})] = f_i\left(\underbrace{E[\tilde{w}_{if}]}_{+}, \underbrace{Var[\tilde{w}_{if}]}_{-}\right)$$

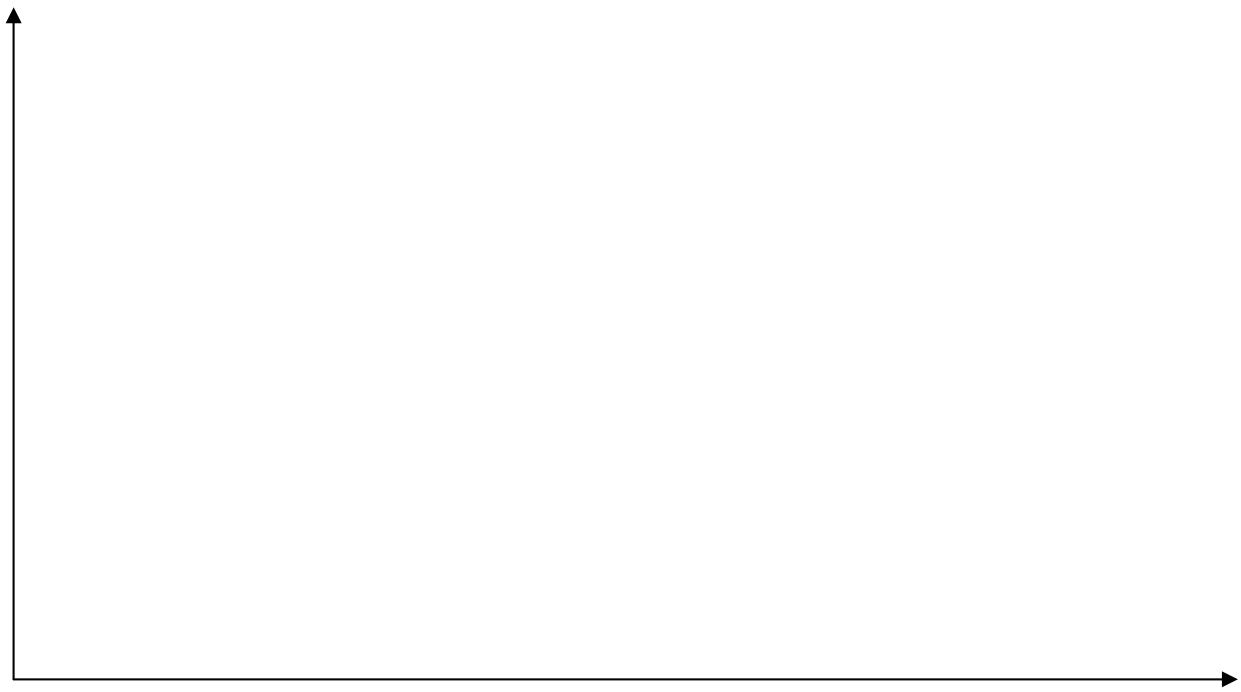
Relevante Größen:

(1) Der erwartete Return der Firmen: $\mu_j = E[\tilde{r}_j]$

$$\mu' = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_J)$$

(2) Die Varianz-Kovarianz-Matrix: $\sigma_{jk} = Cov(\tilde{r}_j, \tilde{r}_k)$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1J} \\ . & & & \\ . & & & \\ \sigma_{J1} & . & . & \sigma_{JJ} \end{pmatrix}$$



Beobachtung: Wertpapiere, die rechts unten liegen, werden nicht gekauft, oder?

Ergebnis:

Falls ein risikofreies Wertpapier existiert, so ist die Komposition des rsikanten Portfolios für alle Marktteilnehmer gleich. ***(Marktportfolio)***
Individuen unterscheiden sich lediglich darin, wieviel sie in das Marktportfolio investieren.

$$E[\tilde{r}] = \alpha r_0 + (1-\alpha)\mu_p \longleftarrow \text{erwarteter Return des Marktportfolios}$$

$$Var[\tilde{r}] = (1-\alpha)^2 \sigma_p^2$$

$$\Rightarrow \sigma(\tilde{r}) = (1-\alpha)\sigma_p \qquad \text{(linear in } \alpha\text{)}$$

Alles Marktrisiko wird in einem 'mutual fund' transferiert, den die Individuen in größeren oder kleineren Mengen halten.

Empirie

Canner, N., Mankiw, N.G. & Weil, D.N.: "***An Asset Allocation Puzzle***", AER '97, 181-191

=> CAPM => 'mutual fund separation' - ein Marktportfolio genügt

hier:

- Index-Fond auf den Aktienmarkt
- Index-Fond auf 'Bonds' (Schuldverschreibungen)
- risikofreies Cash

$$\text{Daten von 1926-1992} \Rightarrow \frac{\#\,\text{Bonds}}{\#\,\text{Aktien}} \approx \frac{1}{3}$$

=> Anlageberater (Daten von 1993/94):

		Portfolioanteil			**Verhältnis**
		Cash	**Bonds**	**Aktien**	**Bonds/ Aktien**
Fidelity	conservative	50	30	20	***1,5***
	moderate	20	40	40	***1,0***
	aggressive	5	30	65	***0,46***
Merrill Lynch	conservative	20	35	45	***0,78***
	moderate	5	40	55	***0,73***
	aggressive	5	20	75	***0,27***
The N.Y. Times	conservative	20	40	40	***1,0***
	moderate	10	30	60	***0,5***
	aggressive	0	20	80	***0,25***

Modifikationen des CAPM

- Kein risikofreies Wertpapier existiert (wegen Inflationsrisiko) => 'two-fund separation', d.h. 2 riskante Marktportfolios genügen
  numerisch: Bonds/Aktien $\uparrow$ für riskantere Portfolios

- CRRA anstatt quadtrat. Nutzenfunktion
  auch hier: Bonds/Aktien $\uparrow$
- Ausschluß von 'short-sales'
  - Dies erklärt Phänomen für 'aggressive' Portfolios, da hier die Individuen gerne Geld leihen würden, um mehr in das riskante Projekt zu investieren.
  - Aber für moderate Portfolios bleibt das Problem bestehen

- Dynamische Portfolio Allokation
  da der reale Zinssatz temporär korreliert ist => Effekt nicht eindeutig

- Humankapital: nicht handelbares Gut
  z.B. Return (Humankapital) $\cong$ Return (Aktien)

$$=> \quad \frac{\text{Bonds}}{\text{HK} + \text{Aktien}} \qquad \text{konstant}$$

$$=> \quad \text{da HK konstant } \frac{\text{Bonds}}{\text{Aktien}} \downarrow$$

  aber: Jungen Leuten wird empfohlen, mehr Aktien als ältere zu halten ($HK_J > HK_A$)

- Schulden sind nichthandelbare Güter

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{Bonds} - \text{Schulden}}{\text{Aktien}} \text{ konstant } \Rightarrow \frac{\text{Bonds}}{\text{Aktien}} \downarrow$$

auch hier: Schulden (junger Leute) > Schulden (ältere Leute)

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{Bonds}}{\text{Aktien}}(\text{jung}) \; > \; \frac{\text{Bonds}}{\text{Aktien}}(\text{alt})$$