

A Theorie des Haushalts

Hypothese: *Ein Konsument wird “das beste” Güterbündel kaufen wollen, das er “sich leisten” kann.*

- Budgetbeschränkung \Rightarrow “sich leisten können”.
- Präferenzen plus Nutzenmaximierung \Rightarrow “das beste”.

A.1 Die Budgetbeschränkung

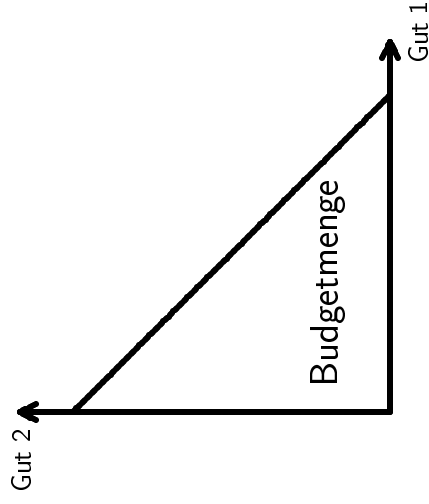
Annahme: Konsument hat festes, exogen vorgegebenes Budget, das er zum Kauf zweier Güter ausgeben kann.

Budgetbeschränkung:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq m$$

p_1, p_2	Preise der Güter 1 und 2
x_1, x_2	Mengen der Güter 1 und 2
m	Höhe des Budgets des Konsumenten

Die Beschränkung auf zwei Güter kann leicht aufgehoben werden. Sie ist keine wesentliche Einschränkung, wenn das Nachfrageverhalten nach einem Gut im Verhältnis zu allen anderen Gütern interessiert.



Figur A.1: Die Budgetmenge

Budgetgerade

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

Menge aller Kombinationen von x_1 und x_2 , bei denen das Budget voll ausgeschöpft wird.

Die **Budgetmenge** ist die Menge aller $\{x_1, x_2\}$, die auf und unterhalb der Budgetgeraden liegen.

Komparative Statik:

- Erhöhung von m
 \Rightarrow Parallelverschiebung der Budgetgeraden nach außen.
- Erhöhung von p_1
 \Rightarrow Drehung der Budgetgerade um den Ordinatenabschnitt nach innen.
- Erhöhung von p_2
 \Rightarrow Drehung der Budgetgerade um den Abszissenabschnitt nach innen.
- Erhöhung von p_1 und p_2 und m um denselben Prozentsatz
 \Rightarrow Budgetmenge bleibt unverändert.
- **Mengensteuer** (Stücksteuer) t auf Gut 1:
 \Rightarrow Preis p_1 erhöht sich auf $p_1 + t$.
- **Wertsteuer** (Ad Valorem Steuer) τ auf Gut 1:
Preis p_1 erhöht sich auf $(1 + \tau)p_1$.

Steigung der Budgetgeraden entspricht dem negativen relativen Preis, $-\frac{p_1}{p_2}$, und reflektiert die Opportunitätskosten von Gut 1 in Einheiten von Gut 2: Wieviel Konsum muss von Gut 2 aufgegeben werden, um eine zusätzliche Einheit von Gut 1 kaufen zu können.

A.2 Präferenzen

In diesem Abschnitt werden wir ein Konzept entwickeln, mit dem sich die Präferenzen eines Konsumenten über **Güterbündel (oder Konsumbündel)** präzise beschreiben lassen.

Betrachte eine geordnete, vollständige Liste aller Güter, die im untersuchten Entscheidungsproblem eine Rolle spielen, also z.B. (Gut 1, Gut 2, ... , Gut n).

Güterbündel ist ein Vektor

$$x = (x_1, \dots, x_n) ,$$

der für jedes Gut i genau beschreibt, welche Menge x_i der Konsument erhält. Im folgenden Beschränkung auf Zweigüter Fall.

A.2.1 Annahmen über Präferenzen

Wenn ein Konsument die Wahl zwischen zwei Güterbündeln (x_1, x_2) und (y_1, y_2) hat, dann nehmen wir an, dass der Konsument entscheiden kann, ob er

- (x_1, x_2) gegenüber (y_1, y_2) **streng vorzieht**:

$$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$$

- (y_1, y_2) gegenüber (x_1, x_2) **streng vorzieht**:

$$(y_1, y_2) \succ (x_1, x_2)$$

- zwischen (x_1, x_2) und (y_1, y_2) **indifferent ist**:

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$$

Wenn für den Konsumenten gilt, dass

entweder $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$ oder $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$,

dann sagen wir, dass der Konsument (x_1, x_2) gegenüber (y_1, y_2) **schwach vorzieht**:

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$$

.

Die Relationen " \succ ", " \succeq ", und " \sim " sind eng miteinander verknüpft:

- Falls $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$, dann muss gelten, dass $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$.
- Falls $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ und nicht $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$, dann muss gelten, dass $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$.

Daraus folgt: Wenn wir die schwache Präferenzordnung " \succeq " kennen, dann kennen wir auch die starken Präferenzen und die Indifferenzen des Konsumenten.

In der Ökonomie werden typischerweise die folgenden Annahmen über die Präferenzen " \succeq " eines Konsumenten gemacht, die die **Konsistenz** des Konsumentenverhaltens sicherstellen sollen.

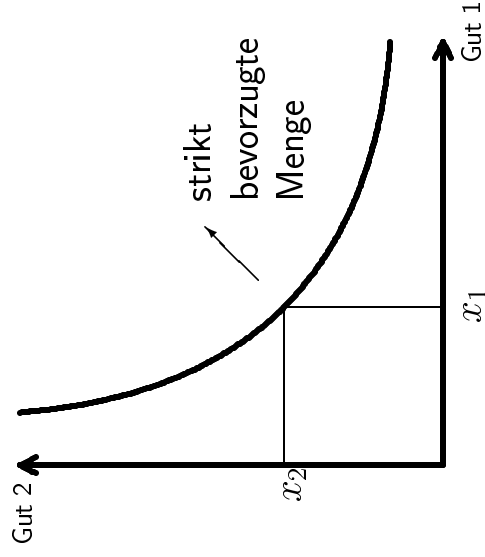
Axiome des Konsumentenverhaltens:

- 1) **Vollständigkeit:** Der Konsument ist in der Lage, für jedes beliebige Paar von zur Wahl stehenden Güterbündeln (x_1, x_2) und (y_1, y_2) zu entscheiden, ob $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ oder $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$ oder beides.
- 2) **Reflexivität:** Jedes Güterbündel ist wenigstens so gut, wie es selbst: $(x_1, x_2) \succeq (x_1, x_2)$.
- 3) **Transitivität:** Wenn $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \succeq (z_1, z_2)$, dann gilt auch $(x_1, x_2) \succeq (z_1, z_2)$.

Die gesamte Theorie des Konsumentenverhaltens kann mit Hilfe von so definierten Präferenzrelationen erklärt werden. Wir werden diese Theorie im folgenden zunächst graphisch mit Hilfe von Indifferenzkurven darstellen.

A.2.2 Indifferenzkurven

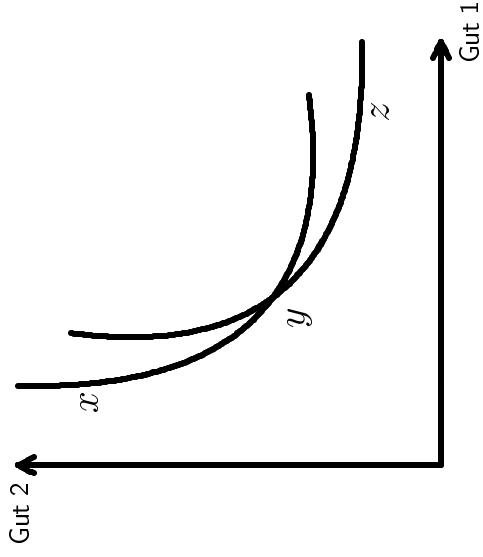
Indifferenzkurve ist die Menge aller Güterbündel, denen der Konsument indifferent gegenüber steht:



Figur A.2: Indifferenzkurve

Pfeil gibt die "Besser-Richtung" an, d.h., alle Güterbündel, die rechts oberhalb dieser Indifferenzkurve liegen, werden vom Konsumenten gegenüber (x_1, x_2) strikt vorgezogen.

Im Prinzip können Indifferenzkurven die unterschiedlichsten Formen annehmen, aber sie dürfen sich nie schneiden!



Figur A.3: Unmögliche Indifferenzkurven

Betrachte die Güterbündel x , y und z . Wenn zwei Güterbündel nicht auf derselben Indifferenzkurve liegen, wird eines dem anderen strikt vorgezogen. Sei z.B. $x \succ z$. Da x und y auf einer Indifferenzkurve liegen, gilt

$$x \sim y.$$

Da y und z auf einer Indifferenzkurve liegen, gilt

$$y \sim z.$$

Aus dem Transitivitätsaxiom folgt also, dass

$$x \sim z.$$

Aber das ist ein Widerspruch zu $x \succ z$.

A.2.3 Beispiele für Indifferenzkurven

1) **Perfekte Substitute:**

Der Konsument ist bereit, ein Gut gegen das andere in einem konstanten Verhältnis zu tauschen. \Rightarrow Lineare Indifferenzkurven.

2) **Perfekte Komplemente:**

Der Konsument will die Güter nur in konstantem Verhältnis zueinander konsumieren. Eine zusätzliche Menge von Gut 1 ohne eine zusätzliche Menge von Gut 2 ist nutzlos. \Rightarrow Rechtwinklige Indifferenzkurven.

3) **“Gut” versus “Schlecht”:**

Der Konsument stellt sich besser, wenn er weniger von einem “Schlecht” konsumiert. \Rightarrow Indifferenzkurven haben positive Steigung.

4) **Neutrale Güter:**

Dem Konsumenten ist ein Gut völlig gleichgültig. \Rightarrow Senkrechte (bzw. waagerechte) Indifferenzkurven.

5) **Sättigung:**

Der Konsument stellt sich um so besser, je mehr er von einem Gut konsumiert, aber nur bis eine bestimmte Sättigungsgrenze erreicht ist. Danach ist zusätzlicher Konsum ein “Schlecht”. \Rightarrow Indifferenzkurven sehen aus wie Höhenlinien. Gipfel ist der Sättigungspunkt.

6) **Monotone Präferenzen:**

zusätzlicher Konsum jeden Gutes stellt den Konsumenten besser. \Rightarrow Indifferenzkurven haben negative Steigung, Better-Richtung nach rechts-oben.

7) **Konvexe Präferenzen:**

Präferenzen sind (streng) konvex, wenn die schwach bevorzugte Menge zu jedem Güterbündel eine (streng) konvexe Menge ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der Konsument jede konvexe Kombination (jeden gewichteten "Durchschnitt") zweier Güterbündel, zwischen denen er indifferent ist, gegenüber diesen beiden Güterbündeln schwach (streng) vorzieht, d.h., wenn für alle $\alpha \in [0, 1]$ und für alle (x_1, x_2) , (y_1, y_2) mit $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ gilt:

$$(\alpha x_1 + (1 - \alpha)y_1, \alpha x_2 + (1 - \alpha)y_2) \succeq (\succ) (x_1, x_2) .$$

8) **Nicht-konvexe Präferenzen:**

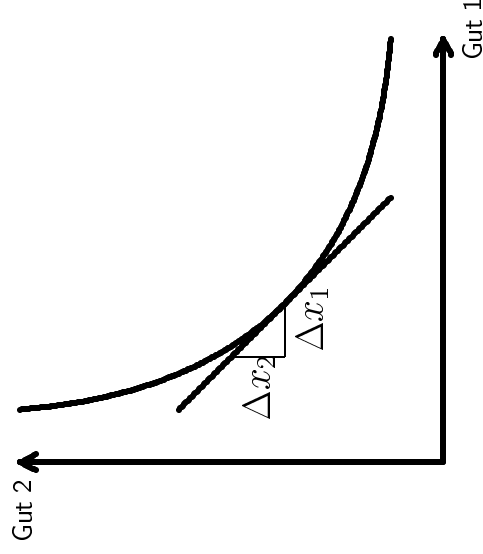
Präferenzen müssen nicht konvex sein. Auch konkave oder andere nicht-konvexe Präferenzen sind denkbar.

Wir werden uns überwiegend mit dem "Normalfall" **monotoner** und **streng konvexer** Präferenzen beschäftigen. Dies ist der interessanteste Fall, weil hier ein echter Trade-off beim Konsum besteht.

A.2.4 Die Grenzrate der Substitution

Die Steigung der Indifferenzkurve in einem bestimmten Punkt wird als **Grenzrate der Substitution (GRS)** in diesem Punkt bezeichnet.

- Sie gibt die Rate an, zu der der Konsument bereit ist, etwas von Gut 2 für eine zusätzliche (kleine) Einheit von Gut 1 zu substituieren.
- Anders ausgedrückt: Sie misst die **marginale Zahlungsbereitschaft** des Konsumenten für Gut 1 in Einheiten von Gut 2.



Figur A.3: Grenzrate der Substitution
Steigung = $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \text{GRS}$

- Bei **monotonen** Präferenzen muss die GRS **negativ** sein, da der Konsument bereit ist, etwas von Gut 1 **aufzugeben**, um mehr von Gut 2 zu bekommen.
- Bei **perfekten Substituten** ist die GRS überall konstant.
- Bei **streng konvexen** Präferenzen nimmt die GRS mit zunehmenden x_1 betragsmässig ab, d.h., je mehr der Konsument bereits von Gut 1 hat, um so weniger ist er bereit, etwas von Gut 2 aufzugeben, um zusätzlich etwas von Gut 1 zu bekommen.

Die GRS ist grundsätzlich **empirisch beobachtbar**:

Angenommen, ein Konsument hat das Güterbündel (x_1, x_2) ausgewählt. Wir bieten ihm an, etwas von Gut 2 gegen etwas von Gut 1 im Verhältnis $T : 1$ auszutauschen, und das für verschiedene Werte von T . Dasjenige T , bei dem der Konsument nicht mehr tauschen möchte, muss seiner Grenzrate der Substitution entsprechen.

A.3 Nutzen

Nutzenfunktionen sind eine alternative Darstellung der Präferenzen des Konsumenten.

Verschiedenen Güterbündeln werden **Nutzenwerte** zugeordnet, und zwar so, dass bevorzugte Güterbündel einen höheren Nutzenwert erhalten als weniger erwünschte. Formal:

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \iff u(x_1, x_2) \geq u(y_1, y_2)$$

Eine Nutzenfunktion ordnet Güterbündel entsprechend den Präferenzen des Konsumenten. Die absoluten Nutzenwerte selbst haben keine Bedeutung. Rein **ordinales Konzept**.

Bündel	u_1	u_2	u_3
A	3	17	-1
B	2	10	-2
C	1	0.002	-10.000

Jede der drei Nutzenfunktionen u_1 , u_2 und u_3 ordnet die Güterbündel A, B und C in derselben Reihenfolge und repräsentiert darum dieselbe Präferenzordnung.

Gegensatz: **Kardinaler Nutzen**.

Satz A.1 (Existenz einer Nutzenfunktion)

Wenn eine Präferenzordnung vollständig, reflexiv, transitiv und streng monoton ist (und zusätzlich eine schwache technische Annahme erfüllt ist), dann existiert eine Nutzenfunktion, die diese Präferenzen repräsentiert.

Eine (positive) **monotone Transformation** ist eine Funktion $f(u)$, die jede Zahl u in eine andere Zahl $f(u)$ umwandelt, dabei aber die Ordnung der u erhält, d.h.,

$$f(u_1) > f(u_2) \iff u_1 > u_2$$

Beispiele: $f(u) = u + 17$, $f(u) = 3u$, $f(u) = \ln u, \dots$

Die Funktion $f(u)$ ist eine monotone Transformation, wenn die erste Ableitung $\frac{df(u)}{du} > 0$.

Satz A.2 *Wenn eine Nutzenfunktion $u(\cdot)$ die Präferenzen eines Konsumenten repräsentiert, dann tut dies auch jede beliebige monotone Transformation von $u(\cdot)$.*

Beispiele von Nutzenfunktionen

Wenn man eine Nutzenfunktion gegeben hat, ist es in der Regel leicht, die zugehörigen Indifferenzkurven zu finden. Zeichne einfach die Menge aller Punkte für die $u(x_1, x_2)$ konstant ist.

Einfaches Beispiel: $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

Auf Indifferenzkurve ist Nutzen konstant: $x_1 x_2 = k$.
 \Rightarrow Indifferenzkurve hat die Form:

$$x_2 = \frac{k}{x_1}.$$

Die Funktion $v(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2^2$ ist eine monotone Transformation von $u(\cdot)$. Also muss sie zu denselben Indifferenzkurven führen. Das ist auch der Fall, denn:

$$x_1^2 \cdot x_2^2 = k \iff x_1 \cdot x_2 = \sqrt{k}$$

Also wird eine Indifferenzkurve beschrieben durch:

$$x_2 = \frac{\sqrt{k}}{x_1}.$$

Exakt dieselbe Form wie oben, nur dass hier der absolute Nutzenwert \sqrt{k} und nicht k zugeordnet wird. Aber der absolute Nutzenwert hat, wie gesagt, keine Bedeutung.

Perfekte Substitute

Perfekte Substitute \Rightarrow lineare Indifferenzkurven:

$$x_2 = A - Bx_1 .$$

Eine naheliegende Nutzenfunktion, die diese Indifferenzkurven repräsentiert, ist

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 .$$

Aber: Auch das Quadrat oder der Logarithmus oder jede andere monotone Transformation dieser Funktion erzeugen dieselben Indifferenzkurven.

Perfekte Komplemente

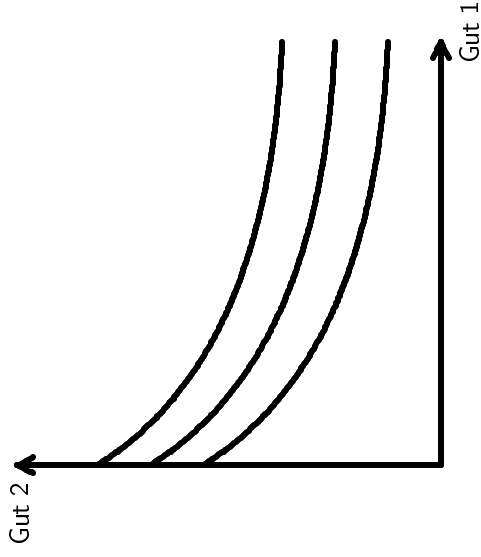
Perfekte Komplemente \Rightarrow rechtwinklige Indifferenzkurven: Konsument will die beiden Güter immer in einem bestimmten Verhältnis konsumieren. Wenn die Menge von Gut 1 steigt, während die von Gut 2 unverändert bleibt, ändert sich sein Nutzen nicht.

Nutzenfunktion:

$$u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$

Quasilineare Präferenzen

Quasilineare Präferenzen \Rightarrow Indifferenzkurven des Konsumenten sind vertikal versetzt:



Figur A.4: Quasilineare Präferenzen

Indifferenzkurven können beschrieben werden durch:

$$x_2 = k - v(x_1) .$$

Nutzenfunktion, die diese Indifferenzkurven generiert:

$$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$$

Diese Funktion ist linear in x_2 , aber nicht linear in x_1 , darum die Bezeichnung “quasilineare Nutzenfunktion” .

Solche Nutzenfunktionen spielen eine wichtige Rolle bei der wohlfahrtstheoretischen Betrachtung von Partialmärkten.

Cobb-Douglas-Präferenzen

Die folgende Nutzenfunktion ist eine recht flexible und leicht zu handhabende Funktion, die monotone, streng konvexe Präferenzen generiert:

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d,$$

wobei $c > 0$ und $d > 0$.

Wir werden diese Nutzenfunktion in vielen Anwendungsbeispielen näher kennenlernen. In diesen Beispielen ist es oft sehr nützlich, mit einer (äquivalenten) monotonen Transformation dieser Nutzenfunktion zu arbeiten. Insbesondere die Funktionen

$$v(x_1, x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2$$

und

$$\nu(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$$

mit geeignet gewähltem $a \in (0, 1)$ sind monotone Transformationen der Cobb-Douglas-Nutzenfunktion (zeigen!).

A.3.3 Grenznutzen und Grenzrate der Substitution

Grenznutzen des Gutes 1 ist der zusätzliche Nutzen, den der Konsument aus einer zusätzlichen kleinen Menge Δx_1 erhält, bezogen auf diese zusätzliche Menge, d.h.:

$$GU_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

Also beträgt die **absolute Nutzenänderung** aus der zusätzlichen Menge Δx_1 :

$$\Delta U = GU_1 \Delta x_1$$

Wenn wir eine marginale Veränderung der Menge x_1 betrachten ($\Delta x_1 \rightarrow 0$), dann ist der Grenznutzen einfach die **partielle Ableitung** der Nutzenfunktion nach x_1 :

$$GU_1 = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

Vorsicht: Die absolute Höhe des Grenznutzens ist ebenso unbestimmt wie der Nutzen selbst. Wenn z.B. die Nutzenfunktion mit 2 multipliziert wird, verdoppelt sich auch der Grenznutzen.

Dennoch können wir den Grenznutzen verwenden, um die **Grenzrate der Substitution** an einer beliebigen Stelle (\bar{x}_1, \bar{x}_2) zu bestimmen:

Betrachte eine kleine Variation von x_1 und x_2 entlang der Indifferenzkurve durch (\bar{x}_1, \bar{x}_2) . Für diese muss gelten:

$$GU_1 \Delta x_1 + GU_2 \Delta x_2 = \Delta U = 0$$

Daraus folgt:

$$-\frac{GU_1}{GU_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = GRS$$

Wenn die Nutzenfunktion differenzierbar ist, können wir die GRS auch wie folgt bestimmen:

- Bezeichne den Nutzen an der Stelle (\bar{x}_1, \bar{x}_2) mit $u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = k$.
- Die GRS gibt die Steigung der Indifferenzkurve am Punkt (\bar{x}_1, \bar{x}_2) an.
- Die Indifferenzkurve ist bestimmt durch:

$$u(x_1, x_2) = k$$

- Totale Differenzierung dieser Gleichung ergibt:

$$du = \frac{\partial u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0 .$$

- Also gilt:

$$-\frac{\partial u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)/\partial x_1}{\partial u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)/\partial x_2} = \frac{dx_2}{dx_1} = GRS .$$

Wieso ist die GRS durch die Grenznutzen eindeutig bestimmt, obwohl die Grenznutzen selbst nicht eindeutig bestimmt sind?

Wir zeigen, dass eine monotone Transformation die GRS nicht beeinflusst:

Sei $v(x_1, x_2) = f(u(x_1, x_2))$ eine monotone Transformation. Dann folgt aus der Anwendung der Kettenregel:

$$GRS = -\frac{\partial v / \partial x_1}{\partial v / \partial x_2} = -\frac{\partial f / \partial u \cdot \partial u / \partial x_1}{\partial f / \partial u \cdot \partial u / \partial x_2} = -\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}$$

Also kürzt sich die Transformation gerade heraus.

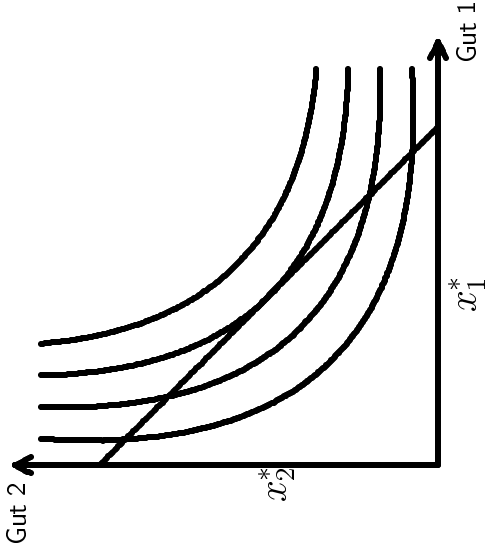
Beispiel: **Cobb-Douglas-Nutzenfunktion**, GRS ausrechnen!

A.4 Entscheidung

A.4.1 Charakterisierung des Optimums

Für welches Güterbündel wird sich der Konsument entscheiden?

- Wenn der Konsument monotone Präferenzen hat, muss das optimale Güterbündel auf der Budgetgeraden liegen.
- Typischerweise wird die Budgetgerade die Indifferenzkurve des Konsumenten im optimalen Güterbündel gerade tangieren.



Figur A.5: Optimale Entscheidung

- Es kann aber auch vorkommen, dass die Indifferenzkurven überall steiler als die Budgetgerade sind. In diesem Fall wird der Konsument nur ein Gut konsumieren (Randlösung).
- Wenn der Konsument jedoch beide Güter konsumieren will (und die Indifferenzkurven differenzierbar sind), dann **muss** im Optimum die Budgetgerade die Indifferenzkurve gerade tangieren (**notwendige Bedingung**).
- Wenn die Präferenzen streng konvex sind, dann ist diese Bedingung auch **hinreichend** für eine innere Lösung.
- Die Steigung der Budgetgeraden ist $-p_1/p_2$. Da die Grenzrate der Substitution ebenfalls die Steigung der Indifferenzkurve im gewählten Güterbündel beschreibt, muss gelten

$$|GRS| = \frac{p_1}{p_2},$$

d.h., der **Absolutwert der GRS muss im Optimum gleich dem Preisverhältnis sein.**

Interessante Implikation:

Alle Konsumenten stehen denselben Preisen gegenüber.

⇒ GRS für alle Konsumenten gleich.

⇒ Alle Konsumenten sind bereit, die Güter zu exakt demselben Verhältnis zu tauschen (egal welches Einkommen

oder welche Präferenzen sie haben mögen).

A.4.2 Nachfrage des Konsumenten

Leiten wir die Nachfrage des Konsumenten zunächst für einige Beispiele ab:

- **Perfekte Substitute**

$$x_1 = \begin{cases} \frac{m}{p_1} & \text{falls } p_1 < p_2 \\ \in [0, \frac{m}{p_1}] & \text{falls } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{falls } p_1 > p_2 \end{cases}$$

- **Perfekte Komplemente**

$$x_1 = x_2 = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

- **Neutrale Güter und “Schlechte”**

$$x_1 = \frac{m}{p_1}, \quad x_2 = 0$$

- **Konkave Präferenzen**

Nur eines der beiden Güter wird konsumiert.

Allgemeiner Ansatz zur Ableitung der Nachfragefunktion:

Das Problem des Konsumenten ist:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$

unter der Nebenbedingung $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$

Zwei Möglichkeiten zur Lösung dieses Problems:

1) Substitutionsverfahren

– Löse die Nebenbedingung nach x_2 auf:

$$x_2(x_1) = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

– substituiere x_2 in der Zielfunktion:

$$\max_{x_1} u\left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1\right)$$

– Löse das unbeschränkte Maximierungsproblem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} &= 0 \\ \iff \frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_1} - \frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_2} \frac{p_2}{p_1} &= 0 \end{aligned}$$

Das ist eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Nach x_1 auflösen. Danach $x_2(x_1)$ ausrechnen.

2) Lagrange-Ansatz

- Schreibe die Lagrange-Funktion:

$$L = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$$

- Differenziere nach den drei Unbekannten x_1 , x_2 , und λ . Im Optimum müssen die Ableitungen gleich 0 sein:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1x_1^* + p_2x_2^* - m = 0$$

Löse die drei Gleichungen nach den drei Unbekannten λ , x_1 und x_2 auf.

Beispiel: Cobb-Douglas-Nutzenmaximierung durchrechnen.

A.5 Individuelle Nachfrage

Nachfragefunktion des Konsumenten: Optimale Menge jeden Gutes in Abhängigkeit von Preisen und Einkommen.

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, m)$$

$$x_2 = x_2(p_1, p_2, m)$$

Komparativ statische Analyse: Wie verändert sich die Nachfrage nach Gut i, wenn sich

- das Einkommen verändert?
- der Preis dieses Gutes verändert?
- der Preis des anderen Gutes verändert?

A.5.1 Veränderungen des Einkommens: Normale und inferiore Güter

Halten wir zunächst die Preise beider Güter konstant und betrachten nur Veränderungen des Einkommens.

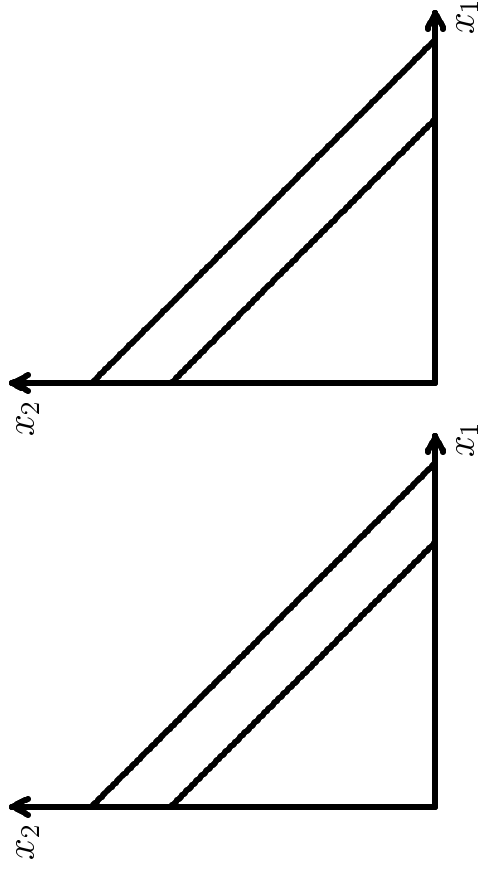
- **Normales Gut:** Nachfrage nach diesem Gut nimmt mit dem Einkommen zu,

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial m} > 0 .$$

- **Inferiores Gut:** Nachfrage nach diesem Gut nimmt mit dem Einkommen ab,

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial m} < 0 .$$

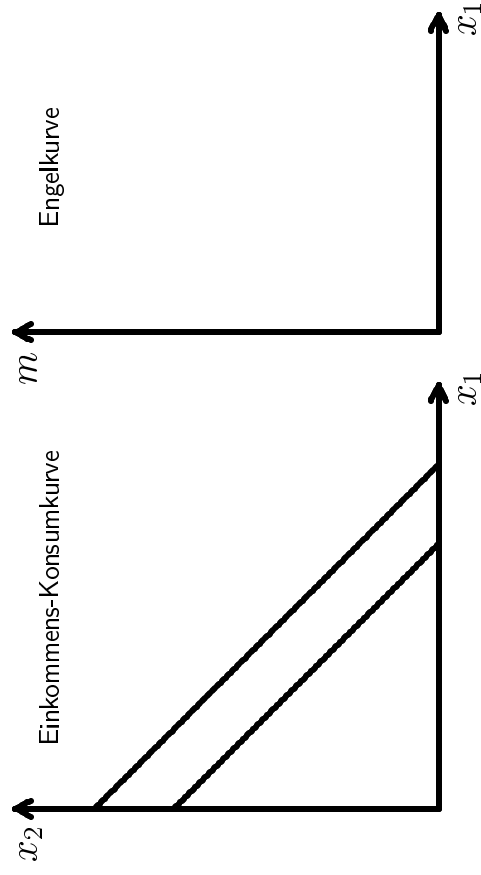
Güter des einfachen Bedarfs oder niedriger Qualität sind oft inferiore Güter, weil sie bei steigendem Einkommen durch höherwertige Güter ersetzt werden.



Figur A.6: Normale und Inferiore Güter

Einkommens-Konsumkurve: gibt beide nachgefragten Gütermengen im (x_1, x_2) -Diagramm für verschiedene Einkommen an. Wird auch Einkommens-Expansionspfad genannt.

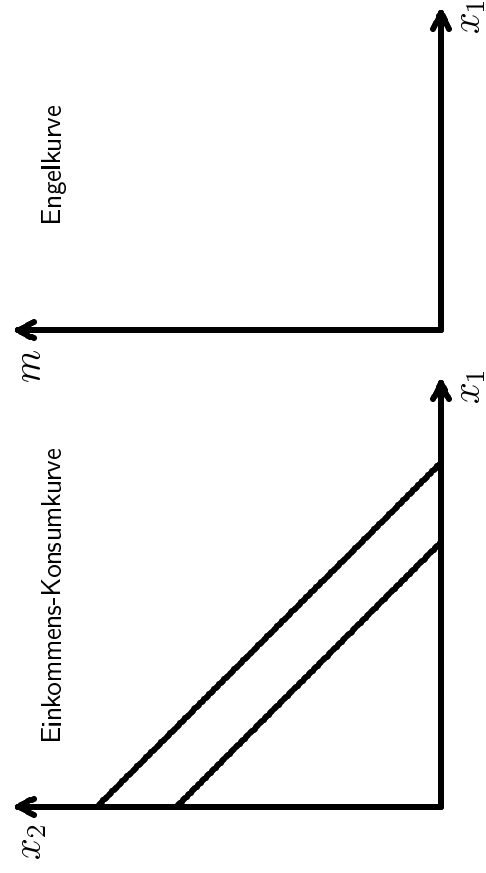
Engelkurve: gibt die Nachfrage nach einem Gut im (x_1, m) -Diagramm in Abhängigkeit vom Einkommen an.



Figur A.7: Einkommens-Konsumkurve und Engelkurve

Beispiele:**a) Perfekte Substitute:**

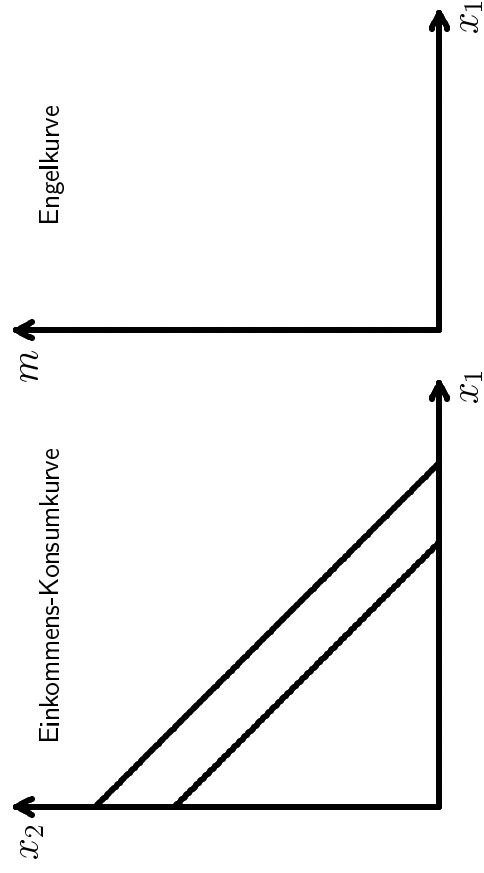
$$p_1 < p_2 \Rightarrow x_1 = \frac{m}{p_1}, x_2 = 0$$



Figur A.8: Perfekte Substitute

b) Perfekte Komplemente:

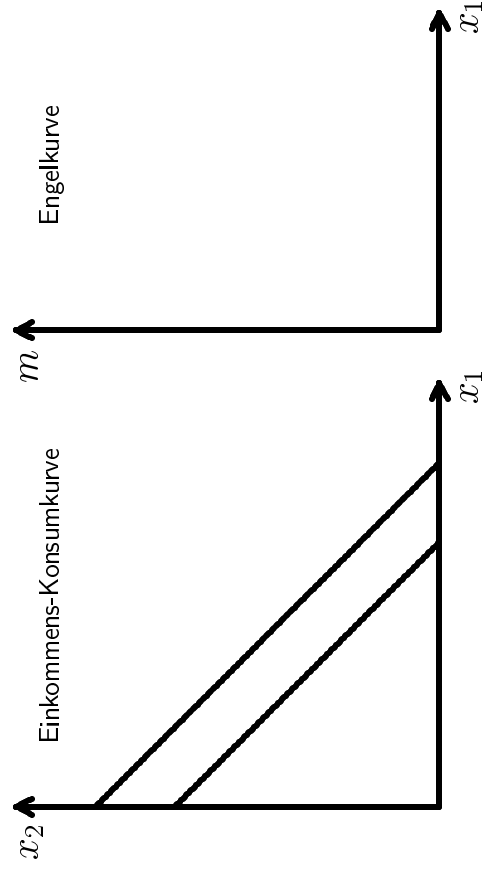
$$x_1 = \frac{m}{p_1 + p_2}, \quad x_2 = \frac{m}{p_1 + p_2}$$



Figur A.9: Perfekte Komplemente

c) Cobb-Douglas-Präferenzen:

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a} \Rightarrow x_1 = \frac{am}{p_1}, \quad x_2 = \frac{(1-a)m}{p_2}$$



Figur A.10: Cobb-Douglas-Präferenzen

Alle diese Beispiele führten zu **linearen Engelkurven**. Das liegt daran, dass alle diese Beispiele zur Klasse der homothetischen Präferenzen gehören.

Ein Konsument hat **homothetische Präferenzen**

wenn für alle $k > 0$ gilt:

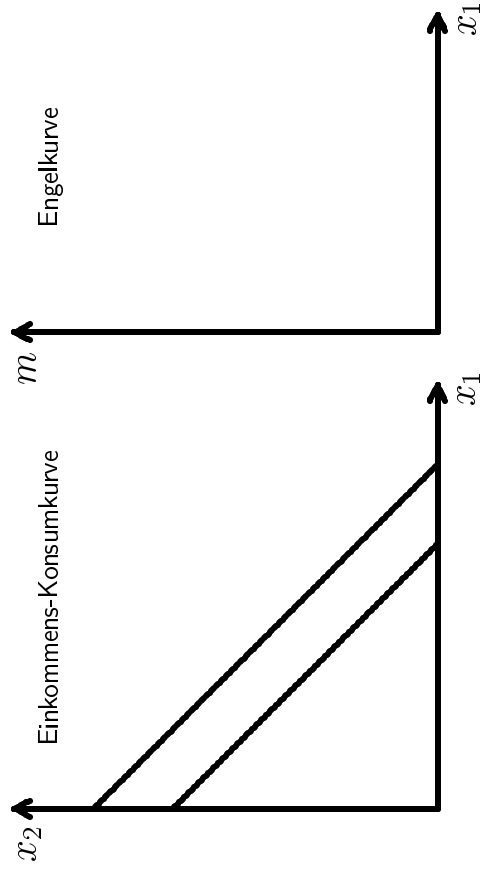
$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \iff (kx_1, kx_2) \succeq (ky_1, ky_2)$$

Natürlich können Präferenzen auch nicht homothetisch sein:

- Wenn die Engelkurve konkav ist, spricht man von einem **Luxusgut**: die Nachfrage steigt überproportional mit dem Einkommen.
- Wenn die Engelkurve konvex ist, spricht man von einem **notwendigen Gut**: die Nachfrage steigt unterproportional mit dem Einkommen.

d) Quasilineare Präferenzen:

$$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2 \Rightarrow x_1 \text{ ist unabhängig von } m$$



Figur A.11: Quasilineare Präferenzen

Bei quasilinearen Präferenzen gibt es also keine "Einkommenseffekte". Solche Präferenzen sind oft realistisch, wenn die Ausgaben für das betreffende Gut nur einen sehr kleinen Teil des Einkommens ausmachen.

A.5.2 Veränderungen des Preises des Gutes: Gewöhnliche Güter und Giffen-Güter

Halten wir jetzt das Einkommen und den Preis des anderen Gutes fest und betrachten Veränderungen des eigenen Preises.

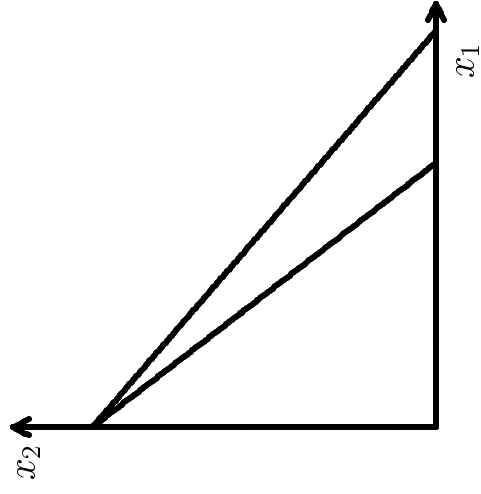
- **Gewöhnliches Gut:** Nachfrage nach diesem Gut nimmt mit dem Preis ab,

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} < 0 .$$

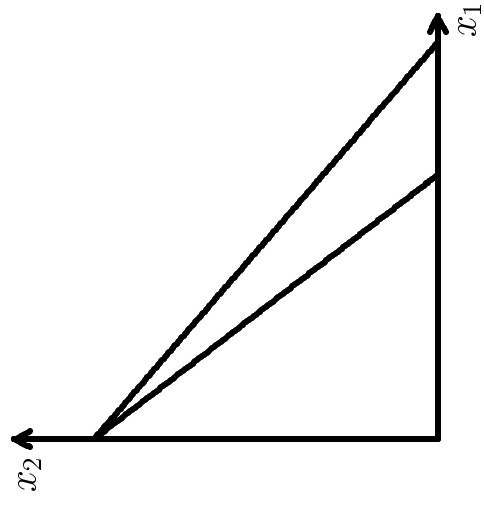
- **Giffen-Gut:** Nachfrage nach diesem Gut nimmt mit dem Preis zu,

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_1} > 0 .$$

Giffen Güter tauchen sehr selten auf, aber es gibt sie. Beispiel: Nachfrage nach Kartoffeln im frühen 19. Jahrhundert. Wir werden später sehen, dass Giffen-Güter inferiore Güter sein müssen, aber nicht umgekehrt.



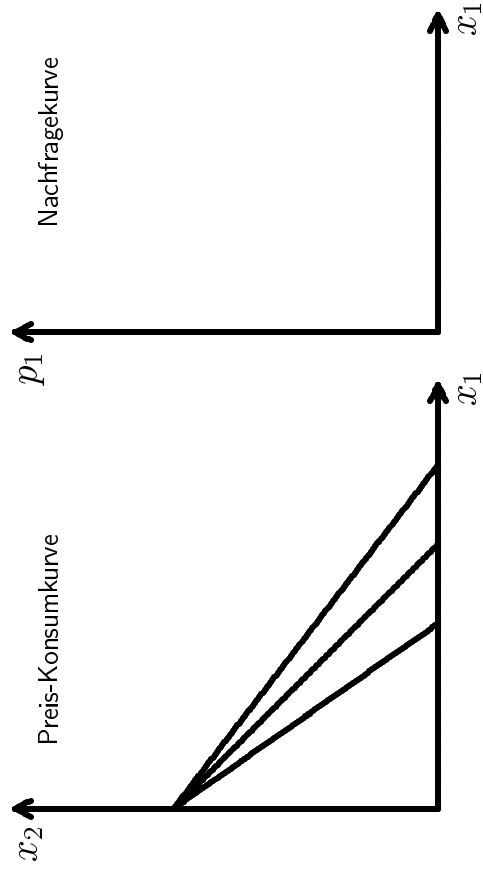
Figur A.12a: Gewöhnliches Gut



Figur A.12b: Giffen-Gut

Preis-Konsumkurve: gibt beide nachgefragten Gütermengen im (x_1, x_2) -Diagramm für verschiedene Preise von Gut 1 an.

Nachfragekurve: gibt die Nachfrage nach einem Gut im (x_1, p_1) -Diagramm in Abhängigkeit vom eigenen Preis an.



Figur A.13: Preis-Konsumkurve und Nachfragekurve

A.5.3 Veränderungen des Preises des anderen Gutes: Substitute und Komplemente

Schliesslich halten wir das Einkommen und den eigenen Preis fest und betrachten Veränderungen des Preises eines anderen Gutes.

- **Substitute:** Nachfrage nach dem betrachteten Gut nimmt zu, wenn der Preis des anderen Gutes steigt:

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_2} > 0 .$$

Wenn Gut 2 teurer wird, “substituiert” der Konsument es durch Gut 1. Extremfall: perfekte Substitute; der Konsument fragt nur das relativ billigere Gut nach.

- **Komplemente:** Nachfrage nach dem betrachteten Gut nimmt mit ab, wenn der Preis des anderen Gutes zunimmt:

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, m)}{\partial p_2} < 0 .$$

Der Nutzen aus dem Konsum von Gut 1 steigt mit dem Konsum von Gut 2. Gut 2 wird teurer

- \Rightarrow Konsument fragt weniger von Gut 2 nach;
- \Rightarrow der Nutzen aus Gut 1 sinkt;
- \Rightarrow Konsument fragt auch weniger von Gut 1 nach.

Extremfall: Perfekte Komplemente; der Konsument will die Güter nur in einem konstanten Verhältnis konsumieren.

Vorsicht: Der 2-Güterfall ist hier sehr speziell: Wenn der Konsument mehr für Gut 1 ausgibt, muss er bei konstantem Einkommen zwangsläufig weniger für Gut 2 ausgeben. Darum ist es hier besser, den N-Güter-Fall zu betrachten.

A.5.4 Die inverse Nachfragefunktion

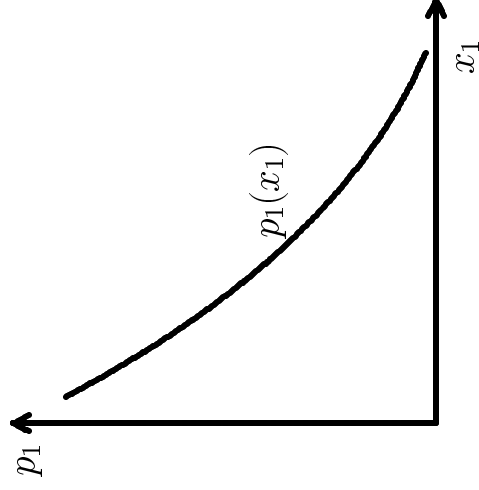
Es wird oft nützlich sein, die Nachfragefunktion

$$x_1 = x_1(p_1, \dots)$$

nach p_1 aufzulösen und die inverse Nachfragefunktion

$$p_1 = p_1(x_1, \dots)$$

zu betrachten (Vorsicht: geht nur, wenn die Nachfragefunktion monoton ist).



Figur A.14: Inverse Nachfragefunktion

Die inverse Nachfragefunktion gibt für jede Menge x_1 an, wieviel das Gut kosten muss, damit der Konsument exakt diese Menge nachfragt.

Die inverse Nachfrage hat eine **interessante Interpretation**:

Im Optimum muss gelten:

$$|GRS| = \frac{p_1}{p_2}$$

Also gilt:

$$p_1 = p_2 |GRS| ,$$

d.h., im Optimum ist der Preis des Gutes 1 proportional zur GRS.

Normiere p_2 auf 1. Dann misst die GRS, wieviel der Konsum von Gut 2 bereit ist aufzugeben, um eine zusätzliche Einheit von Gut 1 zu bekommen.

Die inverse Nachfragefunktion gibt für jede Menge x_1 den Preis p_1 an, bei dem es für den Konsumenten optimal ist, diese Menge nachzufragen. Also drückt die inverse Nachfragefunktion auch die **Zahlungsbereitschaft des Konsumenten** (in Einheiten von Gut 2) für jede weitere Einheit von Gut 1 aus.

Wenn die inverse Nachfragefunktion fällt, bedeutet das, dass die marginale Zahlungsbereitschaft des Konsumenten mit zunehmendem Konsum abnimmt.

A.6 Die Slutsky-Gleichung

Eine Preisänderung hat zwei verschiedene Auswirkungen:

- das Verhältnis, zu dem man ein Gut gegen ein anderes austauschen kann, ändert sich;
- die Kaufkraft des Einkommens ändert sich.

Entsprechend lassen sich zwei Auswirkungen auf das Nachfrageverhalten des Konsumenten unterscheiden:

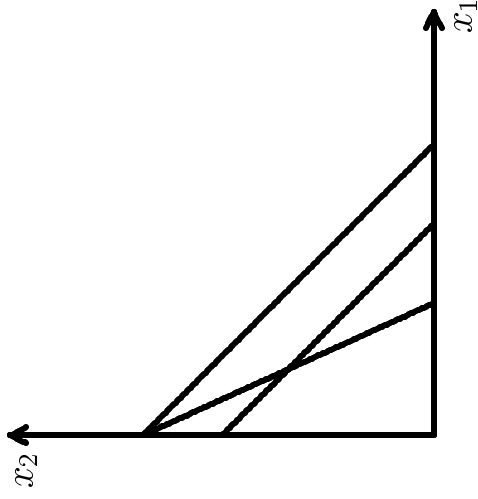
- **Substitutionseffekt**
- **Einkommenseffekt**

Aufspaltung der Preisbewegung in zwei Schritte:

- 1) Wir betrachten den Effekt der **relativen Preisänderung** auf die Nachfrage, indem wir das Einkommen des Konsumenten so verändern, dass seine Kaufkraft trotz der neuen Preise unverändert bleibt.
- 2) Dann betrachten wir den Effekt der Kaufkraftänderung, indem wir dem Konsumenten wieder sein altes Einkommen geben.

Graphisch entspricht das einer **Drehung der Budgetgeraden** um das ursprünglich nachgefragte Konsumbündel und einer anschließenden **Parallelverschiebung**.

Beispiel: Preis von Gut 1 fällt von p_1 auf p'_1



Figur A.15: Drehung und Verschiebung der Budgetgeraden

- Drehung um das ursprüngliche Güterbündel hält die Kaufkraft in dem Sinne unverändert, als der Konsument sich das alte Güterbündel immer noch leisten kann.
- Parallelverschiebung der gedrehten Budgetgerade hält die (neuen) relativen Preise unverändert und reflektiert nur die Veränderung der Kaufkraft.

Um wieviel muss sich das Einkommen ändern, damit die Kaufkraft bei den neuen Preisen erhalten bleibt?

$$m' = p'_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$m' - m = x_1(p'_1 - p_1)$$

bzw.

$$\Delta m = x_1 \Delta p_1$$

- Preisänderung und Einkommensänderung müssen in dieselbe Richtung gehen, damit das alte Bündel erschwänglich bleibt.

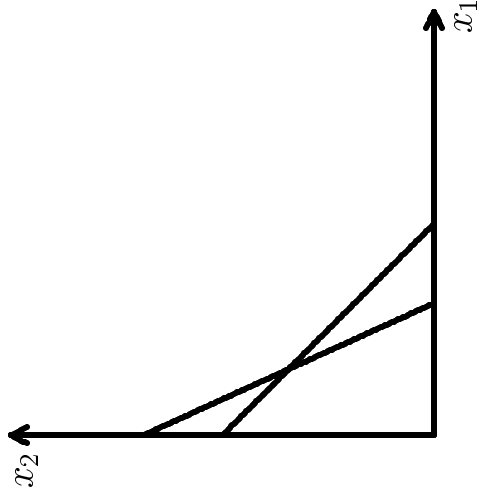
A.6.1 Der Substitutionseffekt

(x_1, x_2) ist nach Drehung der Budgetgeraden immer noch erschwänglich, aber nicht mehr optimal.

Substitutionseffekt:

$$\Delta x_1^s = x_1(p'_1, m') - x_1(p_1, m)$$

- **Das Vorzeichen des Substitutionseffekts muss negativ sein.** Das heisst, wenn der Preis von Gut 1 fällt, muss die Nachfrage nach Gut 1 steigen! Beweis:



Figur A.16: Der Substitutionseffekt

Alle Punkt auf der neuen Budgetgeraden, die links von (x_1, x_2) , liegen, wären zu den alten Preisen bereits erschwinglich gewesen, sind aber nicht gewählt worden. Also können sie auch bei den neuen Preisen nicht besser als (x_1, x_2) sein (schwaches Axiom der offenbarten Präferenzen).

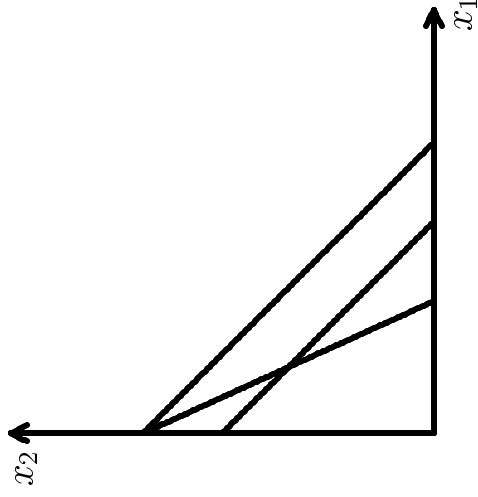
- **Der Konsument muss sich durch den Substitutionseffekt besser stellen** (unabhängig davon, ob der Preis für Gut 1 gestiegen oder gefallen ist).
- Slutsky-Substitutionseffekt wird auch **Veränderung der Kaufkraft-kompensierten Nachfrage** genannt.

A.6.2 Der Einkommenseffekt

Einkommenseffekt:

$$\Delta x_1^e = x_1(p'_1, m) - x_1(p'_1, m')$$

- Das Vorzeichen des Einkommenseffekts ist unbestimmt. Beweis:



Figur A.17: Der Einkommenseffekt

Wenn m' auf m steigt, kann die Nachfrage nach Gut 1 steigen (normales Gut) oder fallen (inferiores Gut).

- Der Nutzen des Konsumenten steigt durch den Einkommenseffekt genau dann, wenn das Einkommen steigt, d.h., wenn $m > m'$.

A.6.3 Die gesamte Nachfrageänderung

Die gesamte Änderung der Nachfrage nach Gut 1 ist gegeben durch:

$$\Delta x_1 = x_1(p'_1, m) - x_1(p_1, m)$$

Wir haben gezeigt, dass sich diese Veränderung wie folgt aufteilen lässt:

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^s + \Delta x_1^e$$

bzw.

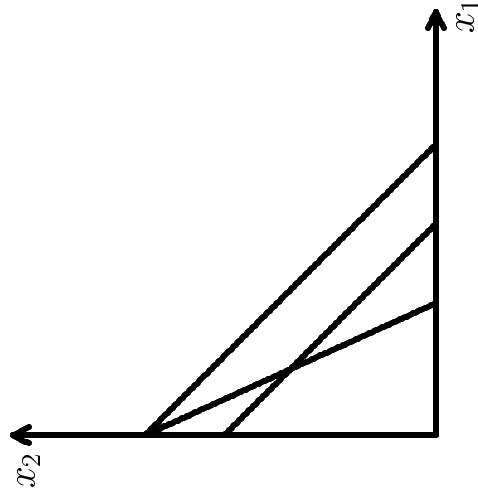
$$x_1(p'_1, m) - x_1(p_1, m) = [x_1(p'_1, m') - x_1(p_1, m)] \\ + [x_1(p'_1, m) - x_1(p'_1, m')]$$

Diese Gleichung wird **Slutsky-Identität** genannt. Mathematisch ist sie eine Trivialität. Interessant ist die **Interpretation** der Aufspaltung des Gesamteffektes auf der rechten Seite:

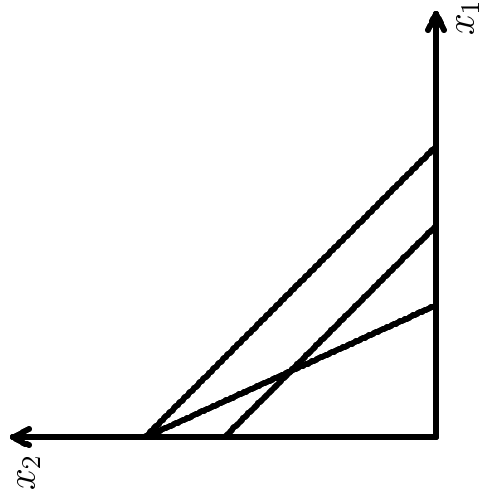
- Der erste Term, $x_1(p'_1, m') - x_1(p_1, m)$, ist der Substitutionseffekt. Er ist immer negativ, d.h. der Preisänderung entgegengesetzt.
- Der zweite Term, $x_1(p'_1, m) - x_1(p'_1, m')$, ist der Einkommenseffekt. Er ist negativ genau dann, wenn es sich um ein normales Gut handelt.

Folgerungen:

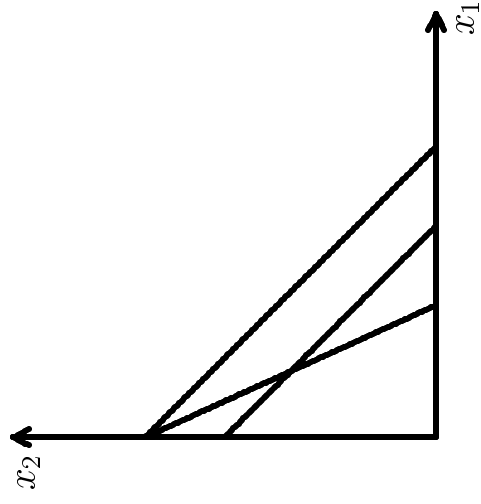
- Normales Gut: Gesamteffekt muss negativ sein.
- Inferiores Gut: Gesamteffekt nicht eindeutig.
- Ein Giffen-Gut muss auch ein inferiores Gut sein, aber nicht umgekehrt.

Beispiele:

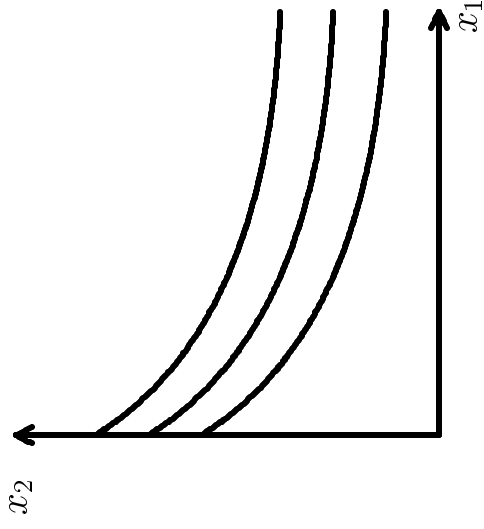
Figur A.18: Normales Gut: Substitutions- und Einkommenseffekt



Figur A.19: Inferiores Gut, aber kein Giffen-Gut



Figur A.20: Giffen-Gut



Figur A.21: Quasilineare Präferenzen

Weitere Beispiele:

- Perfekte Substitute: nur Substitutionseffekt
- Perfekte Komplemente: nur Einkommenseffekt

A.6.4 Slutsky-Gleichung mit Differentialrechnung

Angenommen, der Konsument fragt bei den Preisen (\bar{p}_1, \bar{p}_2) und dem Einkommen \bar{m} die Mengen (\bar{x}_1, \bar{x}_2) nach. Wie gross ist seine Nachfrage bei den neuen Preisen (p_1, p_2) , wenn sein Einkommen so kompensiert wird, dass $p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 = m$?

Das ist die **Slutsky-Nachfragefunktion**:

$$x_1^s(p_1, p_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2) \equiv x_1(p_1, p_2, p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2)$$

Differenzieren dieser Identität nach p_1 ergibt:

$$\frac{\partial x_1^s(p_1, p_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1(p_1, p_2, \bar{m})}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(p_1, p_2, \bar{m})}{\partial m} \bar{x}_1$$

Umordnen:

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, \bar{m})}{\partial p_1} = \underbrace{\frac{\partial x_1^s(p_1, p_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial p_1}}_{\text{Substitutionseffekt}} - \underbrace{\frac{\partial x_1(p_1, p_2, \bar{m})}{\partial m} \bar{x}_1}_{\text{Einkommenseffekt}}$$

- Der Substitutionseffekt ist negativ.
- Der Einkommenseffekt ist proportional zu \bar{x}_1 . Bei normalem Gut ist $\frac{\partial x_1}{\partial m} > 0$ und der Gesamteffekt negativ.

A.7 Die Konsumentenrente

Wir nehmen eine quasilineare Nutzenfunktion an:

$$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$$

x_2 seien die Ausgaben für alle übrigen Güter, $p_2 = 1$, $p_1 = p$.

A.7.1 Unteilbares Gut

Angenommen, der Konsument fragt zum Preis p das Güterbündel $(x, m - px)$ nach. Dann muss u.a. gelten:

$$v(x) + m - px \geq v(x - 1) + m - p \cdot (x - 1)$$

Umordnen:

$$r_x \equiv v(x) - v(x - 1) \geq p$$

r_x ist der **Vorbehalts- oder Reservationspreis** des Konsumenten für die x te Einheit des Gutes.

\Rightarrow Der Konsument wird die x te Einheit des Gutes dann und nur dann nachfragen, wenn sein Vorbehaltspreis grösser ist als der Preis für die x te Einheit.

Ferner gilt:

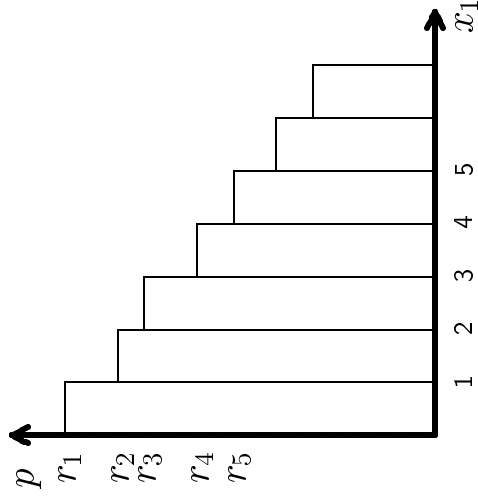
$$v(x) + m - px \geq v(x + 1) + m - p \cdot (x + 1)$$

Umordnen:

$$r_{x+1} \equiv v(x+1) - v(x) \leq p$$

⇒ Wenn der Konsument genau x Einheiten nachfragt, muss gelten:

$$r_x \geq p \geq r_{x+1}$$



Figur A.22: Nachfrage nach unteilbarem Gut

Aus der Nachfragekurve für ein unteilbares Gut kann unmittelbar der Nutzen des Konsumenten abgelesen werden:

- **Bruttonutzen** oder **Bruttorente** des Konsumenten aus dem Konsum von x Einheiten von Gut 1 ist die Fläche unter der Nachfragekurve von $x_1 = 0$ bis $x_1 = x$.

- Bruttonutzen wird gemessen an der maximalen Zahlungsbereitschaft des Konsumenten.
- **Nettonutzen, Nettorente** oder einfach nur **Rente** des Konsumenten ist die Bruttorente abzüglich der Ausgaben $p \cdot x$ für die x Einheiten.
- Nettorente wird auch Überschuss (Surplus) des Konsumenten genannt.
- Wenn wir es mit mehreren Konsumenten zu tun haben, ist die Summe der Nettorenten der einzelnen Konsumenten gleich der **Konsumentenrente**.

A.7.2 Teilbares Gut

Auch bei einem teilbaren Gut können wir die Fläche unter der Nachfragekurve als Mass für den Nutzen des Konsumenten interpretieren.

Beweis: Der Konsument maximiert

$$\max_{x_1, x_2} v(x_1) + x_2$$

$$\text{u.d.N.B: } px_1 + x_2 = m$$

Substituieren der Budgetbeschränkung:

$$\max_{x_1} v(x_1) + m - px_1$$

Bedingung 1. Ordnung für Nutzenmaximum:

$$v'(x_1) = p$$

Also ist die inverse Nachfragefunktion definiert durch:

$$p(x) = v'(x)$$

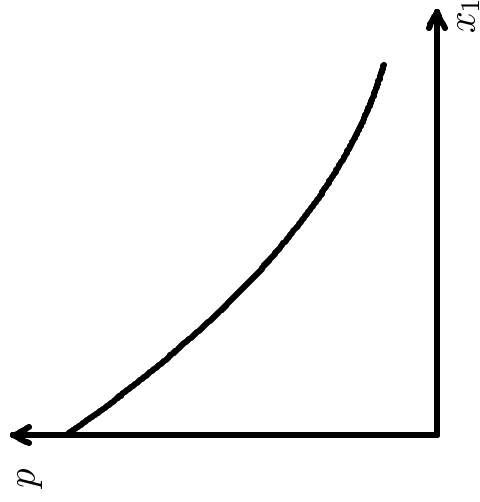
Die Fläche unter der Nachfragekurve von $x_1 = 0$ bis $x_1 = x$ ist das Integral

$$\int_0^x p(t)dt .$$

Also gilt:

$$\int_0^x p(t)dt = \int_0^x v'(t)dt = v(x) - \underbrace{v(0)}_{\equiv 0} = v(x) .$$

Also ist die Fläche unter der Nachfragekurve tatsächlich ein Mass für den Nutzen des Konsumenten.



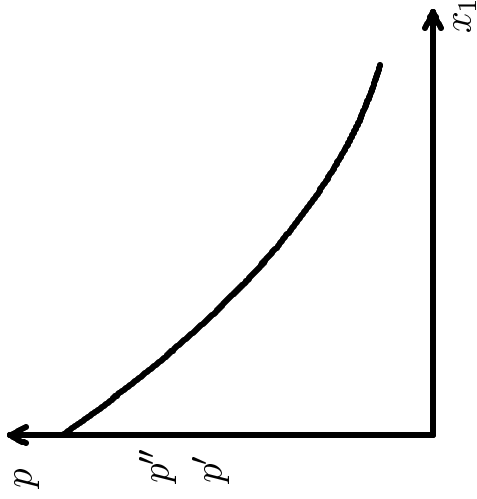
Figur A.23: Nachfrage nach teilbarem Gut

A.7.3 Änderung der Konsumentenrente

Oft sind wir weniger an der absoluten Höhe der Rente des Konsumenten interessiert, als vielmehr daran, wie sich diese Rente ändert, wenn sich exogene Parameter ändern.

Reaktion auf eine Preisänderung:

Angenommen der Preis eines Gutes steigt von p' auf p'' .



Figur A.24: Änderung der Rente des Konsumenten

Die Änderung der Rente setzt sich aus zwei Effekten zusammen:

- Rechteckige Fläche misst den Verlust, der daraus resultiert, dass der Konsument für alle weiterhin konsumierten Einheiten mehr zahlen muss.
- Dreieckige Fläche misst den Verlust, der daraus entsteht, dass der Konsument weniger konsumiert.

A.7.4 Die Bedeutung quasi-linearer Präferenzen

Wenn die Präferenzen des Konsumenten nicht quasi-linear sind, dann verändert sich die Zahlungsbereitschaft mit dem Einkommen.

- ⇒ Zahlungsbereitschaft für die x te Einheit hängt davon ab, wieviel der Konsument bereits für die $x-1$ Einheiten davor ausgeben musste.
- ⇒ Preis p beeinflusst Zahlungsbereitschaft.
- ⇒ Fläche unter der inversen Nachfragefunktion ist kein exaktes Mass für die Rente des Konsumenten.