

9. Übungsblatt - Lösungen

Lösungen:

1.

- (a) Der Reservationspreis ist derjenige Preis, zu dem man gerade indifferent ist zwischen dem Kauf und dem Nichtkauf der betreffenden Einheit des betrachteten Gutes. Hier gilt für die „erste Einheit“, nämlich das Sofa, mit r_p als Peters Reservationspreis für das Sofa:

$$u_p(0, W_p) = u_p(1, W_p - r_p).$$

Unter Verwendung von Peters Nutzenfunktion folgt somit:

$$(1+0)W_p = (1+1)(W_p - r_p) \Leftrightarrow r_p = W_p / 2.$$

- (b) Analoges Vorgehen für Rudi führt zu Rudis Reservationspreis r_R : $r_R = W_R / 3$.

- (c) Der Kauf des Sofas ist pareto-effizient, wenn gilt: $r_p + r_R \geq c$, d. h., wenn die Summe der Reservationspreise die Anschaffungskosten c übersteigt. Dann lässt sich nämlich eine Aufteilung der von jedem zu leistenden Zahlungsbeiträge g_p und g_R finden mit $r_p \geq g_p$, $r_R \geq g_R$, $g_p + g_R = c$, so dass sich niemand schlechterstellt, genauer: so dass sich jeder besserstellt.

Hier gilt also: $r_p + r_R = W_p / 2 + W_R / 3 = 100 / 2 + 75 / 3 = 50 + 25 = 75$, woraus folgt: $r_p + r_R = 75 \geq c$, damit eine Pareto-Verbesserung möglich ist. Das Sofa darf also höchstens 75 Euro kosten (wenn Peter 50 Euro und Rudi 25 Euro zahlen, sind dann beide gerade indifferent bzgl. des Sofakaufs). Kostet es weniger als 75 Euro, dann ist eine Aufteilung der Zahlungsbeiträge möglich, die beide besserstellt.

2. Wichtig: Beide haben zusammen 8000 Euro Einkommen; ihre gemeinsame (aggregierte) Budgetrestriktion lautet daher: $X_L + X_M + G = 8000$.

$$MRS_{G,X_L}^L(G, X_L) = - \frac{\partial U_L / \partial G}{\partial U_L / \partial X_L} = - \frac{1}{2}.$$

- (a)
$$MRS_{G,X_M}^M(G, X_M) = - \frac{\partial U_M / \partial G}{\partial U_M / \partial X_M} = - \frac{X_M}{G}.$$

- (b) Eine pareto-optimale Bereitstellung des öffentlichen Gutes erfordert, dass die Summe der Absolutwerte der Grenzzraten der Substitution den Grenzkosten der Bereitstellung des öffentlichen Gutes entspricht (relativ ausgedrückt, also in Relation zum privaten Gut):

$$\left| MRS_{G,X_L}^L(G, X_L) \right| + \left| MRS_{G,X_M}^M(G, X_M) \right| = MC(G).$$

In der Aufgabe stellt G einfach die Ausgaben für das öffentliche Gut in Geldeinheiten dar, so dass $MC(G) = 1$ gilt. Interpretation in Relation zum privaten Gut: Wenn eine Geldeinheit mehr für das öffentliche Gut ausgegeben wird, muss man eine Geldeinheit weniger für das private Gut ausgeben; folglich kostet eine zusätzliche Einheit des öffentlichen Gutes (Grenzkosten) eine Einheit des privaten Gutes (das private Gut wird in dieser Aufgabe ja auch in Geldeinheiten gemessen).

Somit folgt aus obiger Effizienz-Regel:

$$\frac{1}{2} + \frac{X_M}{G} = 1 \Leftrightarrow \frac{X_M}{G} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow G = 2X_M.$$

- (c) Mit $X_L = 2000$, $X_M = 2000$ folgt aus der (aggregierten) Budgetrestriktion:

$C(G) \equiv G = 8000 - 2000 - 2000 = 4000$. Das heißt, dass 4000 Euro für das öffentliche Gut ausgegeben werden. Die Aufteilung der Ausgaben auf private und öffentliche Güter ist pareto-optimal, wenn die in (b) angeführte Regel erfüllt ist, wenn also die Summe der Absolutwerte der Grenzzraten der Substitution gleich den Grenzkosten des öffentlichen Gutes ist, also:

$$\left| MRS_{G,X_L}^L(G, X_L) \right| + \left| MRS_{G,X_M}^M(G, X_M) \right| = MC(G) = 1.$$

Einsetzen der in (a) berechneten MRS mit $MRS_{G,X_L}^L(4000, 2000) = -1/2$, $MRS_{G,X_M}^M(4000, 2000) = -1/2$ führt dann zu:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = MC(G). \text{ Folglich ist die gewählte Aufteilung pareto-optimal.}$$

- (d) Die Menge aller pareto-optimalen Allokationen wird bestimmt durch:

- die Optimalitätsbedingung $G = 2X_M$ (siehe (b)),
- die Einhaltung der Budgetrestriktion $X_L + X_M + G = 8000$.

Einsetzen von $G = 2X_M$ in die Budgetrestriktion ergibt:
 $X_L + X_M + 2X_M = 8000 \Leftrightarrow X_L = 8000 - 3X_M$.

Somit kann die Menge aller pareto-optimalen Allokationen geschrieben werden als:

$$\{G, X_L, X_M\} = \{2X_M, 8000 - 3X_M, X_M\} \text{ mit } X_M \geq 0, X_L \geq 0 \Leftrightarrow X_M \leq 8000/3.$$

3. Es gilt: $C(G) = G \Rightarrow MC(G) = 1$, $G = g_1 + g_2$.

- (a) Die Individuen 1 und 2 entscheiden simultan über die von ihnen jeweils bereitgestellten Mengen des öffentlichen Gutes. Es ist also ein Cournot-Nash-Gleichgewicht zu ermitteln. Hierzu sind zunächst die Reaktionsfunktionen der beiden Individuen zu ermitteln (die vom jeweils anderen Individuum bereitgestellte Menge des öffentlichen Gutes wird als gegeben betrachtet).

Individuum 1 steht somit vor folgendem Problem:

$$\max_{g_1, x_1} U_1(G, x_1) = a \ln G + \ln x_1 \text{ s. t. } x_1 + g_1 = m_1, g_1 + g_2 = G.$$

Das Problem kann mittels Lagrange-Ansatz oder über ein Substitutionsverfahren gelöst werden. Hier Substitutionsverfahren:

$$\max_{g_1} U_1(g_1 + g_2, m_1 - g_1) = a \ln(g_1 + g_2) + \ln(m_1 - g_1).$$

Die FOC lautet: $\frac{a}{g_1 + g_2} \cdot 1 + \frac{1}{m_1 - g_1} \cdot (-1) = 0$. (Die SOC ist erfüllt.)

Auflösen nach g_1 ergibt dann die Reaktionsfunktion des Individuums 1:

$$g_1(g_2) = \frac{am_1 - g_2}{1 + a}.$$

Analoges Vorgehen für Individuum 2 (oder Symmetrie) führt zur Reaktionsfunktion:

$$g_2(g_1) = \frac{am_2 - g_1}{1 + a}.$$

Durch simultanes Lösen der beiden Reaktionsfunktionen nach g_1 und g_2 erhält man die jeweils bereitgestellten Mengen des öffentlichen Gutes:

$$g_1 = \frac{am_1 - g_2}{1+a}, \quad g_2 = \frac{am_2 - g_1}{1+a} \Rightarrow$$

$$g_1^* = \frac{(1+a)m_1 - m_2}{2+a}, \quad g_2^* = \frac{(1+a)m_2 - m_1}{2+a}.$$

Insgesamt wird somit vom öffentlichen Gut folgende Menge bereitgestellt:

$$G^* = g_1^* + g_2^* = \frac{a(m_1 + m_2)}{2+a}.$$

- (b) Nun ist das soziale Optimum zu berechnen. Die Regel für eine optimale Bereitstellung des öffentlichen Gutes lautet: $|MRS_{G,x_1}^1| + |MRS_{G,x_2}^2| = MC(G)$. Für die Grenzzraten der Substitution erhalten wir:

$$|MRS_{G,x_1}^1| = \left| \frac{\partial U_1 / \partial G}{\partial U_1 / \partial x_1} \right| = \frac{a/G}{1/x_1} = \frac{ax_1}{G}, \quad |MRS_{G,x_2}^2| = \frac{a/G}{1/x_2} = \frac{ax_2}{G}.$$

Mit $MC(G) = 1$ folgt somit als Bedingung für ein soziales Optimum:

$$\frac{ax_1}{G} + \frac{ax_2}{G} = 1 \Leftrightarrow a(x_1 + x_2) = G. \quad (*)$$

Die aggregierte Budgetrestriktion lautet:

$$x_1 + x_2 + g_1 + g_2 = m_1 + m_2, \quad g_1 + g_2 = G = C(G). \text{ Auflösen nach } x_1 + x_2 \text{ ergibt:}$$

$x_1 + x_2 = m_1 + m_2 - G$. Einsetzen in die Bedingung für ein soziales Optimum (*) ergibt dann:

$$a(m_1 + m_2 - G) = G \Leftrightarrow \hat{G} = \frac{a(m_1 + m_2)}{1+a}.$$

\hat{G} ist die sozial optimale Menge des öffentlichen Gutes. Ein Vergleich mit der in (a) ermittelten Menge des öffentlichen Gutes bei privater Bereitstellung zeigt, dass

$$\hat{G} = \frac{a(m_1 + m_2)}{1+a} > \frac{a(m_1 + m_2)}{2+a} = G^*.$$