

1. Übungsblatt - Lösungen

Lösungen:

1.

- (a) $\pi(x) = p4\sqrt{x} - wx$.
- (b) Lösung durch Ermitteln des Maximums von π . (SOC/B. z. O. ist erfüllt.) Ergebnis:
Faktornachfragefunktion $x(p, w) = 4\left(\frac{p}{w}\right)^2$.
Angebotsfunktion ermitteln durch Einsetzen der Faktornachfragefunktion in die Produktionsfunktion: $y(p, w) = 8\left(\frac{p}{w}\right)$.
Gewinnfunktion ermitteln durch Einsetzen von x und y in die Gewinndefinition, d. h. in die Zielfunktion $\pi = py - wx$. Also: $\pi(p, w) = 4\left(\frac{p^2}{w}\right)$.
- (c) Ermitteln der Werte durch Einsetzen von $p = 2000$ und $w = 1000$ in die entsprechenden Funktionen, die unter (b) berechnet wurden. Ergebnisse: $x = 16$, $y = 16$, $\pi = 16.000$ Lit.
- (d) Einführung einer Mengensteuer auf den Output, somit neuer Outputpreis $p' = p - 400 = 2000 - 400 = 1600$. Einführung einer Mengensubvention auf den Input, damit neuer Inputpreis $w' = w - 200 = 1000 - 200 = 800$. Einsetzen von p' und w' in die unter (b) berechneten Funktionen ergibt: $x = 16$, $y = 16$, $\pi = 12.800$ Lit.
- (e) Statt des obigen Steuer-Subventions-Systems wird nun eine 50%ige Gewinnsteuer erhoben. Der Gewinn nach Steuern ist somit gegeben als $\tilde{\pi} = (1 - \tau)\pi$, $\tau = 0,5$ (Gewinnsteuersatz). Franciscos Maximierungsproblem lautet nun: $\max \tilde{\pi} = \max(1 - \tau)\pi = (1 - \tau) \max \pi$. Da der Steuersatz unabhängig vom Gewinn ist, kann der Ausdruck $(1 - \tau)$ vor den Maximierer gezogen werden. Somit ist das Maximierungsproblem dasselbe wie ohne Steuern; die Gewinnsteuer ist neutral. Daher sind auch die Faktornachfrage und das Angebot dasselbe wie unter (c). Für den Nettogewinn ergibt sich: $\tilde{\pi} = 8000$ Lit.

2.

- (a) $f(tx) = (tx_1)^{1/3}(tx_2)^{1/3} = t^{2/3}x_1^{1/3}x_2^{1/3} (= t^{2/3}f(x)) < tf(x) \quad \forall t > 1$.
→ sinkende (abnehmende) Skalenerträge.
- (b) Es handelt sich um ein Kostenminimierungsproblem, dessen Lösung die bedingten Faktornachfragefunktionen sind. Lösung z. B. mittels Lagrange-Ansatz. Die Faktornachfragefunktionen sind dann:

$$x_1(w_1, w_2, y) = y^{3/2} \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^{1/2}, \quad x_2(w_1, w_2, y) = y^{3/2} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^{1/2}.$$

Einsetzen der Faktornachfragefunktionen in die Kostengleichung, also in die Zielfunktion $C = w_1x_1 + w_2x_2$ ergibt dann die Kostenfunktion:

$$c(w_1, w_2, y) = 2y^{3/2} (w_1 w_2)^{1/2}.$$

- (c) Entweder Bedingungen erster Ordnung (FOC) verwenden oder gleich die Optimalbedingung „Faktorpreisverhältnis = TRS“ nutzen:

$$-\frac{w_1}{w_2} = TRS_{12} = -\frac{x_2}{x_1}.$$

3.

(a) $\partial c(w, y) / \partial y = 3y^{1/2} (w_1 w_2)^{1/2}$; $AC(w, y) = c(w, y) / y = 2y^{1/2} (w_1 w_2)^{1/2}$.

- (b) Ein positives Angebot ist nur im Bereich $MC \geq AC$, $d^2 c(y) / dy^2 > 0$ vorhanden.

Man sieht, dass $MC(y) \geq AC(y) \forall y \geq 0$; $d^2 c(y) / dy^2 > 0 \forall y \geq 0$. Somit ist die inverse Angebotsfunktion gleich der gesamten Grenzkostenfunktion (für $y \geq 0$). Es gilt: $p = MC(y) \Rightarrow p(y) = 3y^{1/2} (w_1 w_2)^{1/2}$.

4. Bei dieser Aufgabe geht es darum, die Gesamtkosten zu minimieren:

$$c_1(y_1) = y_1 + y_1^2, \quad c_2(y_2) = y_2 + 2y_2^2, \quad y = y_1 + y_2.$$

$$\min_{y_1, y_2} c = c_1(y_1) + c_2(y_2) \text{ s.t. } y_1 + y_2 = y.$$

Formale Lösung des Problems z. B. über Lagrange-Ansatz:

$$L = y_1 + y_1^2 + y_2 + 2y_2^2 - \lambda[y_1 + y_2 - y]$$

FOC:

$$\partial L / \partial y_1 = 1 + 2y_1 - \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\partial L / \partial y_2 = 1 + 4y_2 - \lambda = 0 \quad (2)$$

$$\partial L / \partial \lambda = -[y_1 + y_2 - y] = 0 \quad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$1 + 2y_1 = MC_1(y_1) = 1 + 4y_2 = MC_2(y_2) \Leftrightarrow 2y_1 = 4y_2. \quad (4)$$

Die FOC implizieren, dass für eine optimale Produktionsaufteilung gelten muss:

$$MC_1(y_1) = MC_2(y_2).$$

Aus (4) folgt:

$$y_2 = (1/2)y_1. \text{ Einsetzen in (3) ergibt dann: } y_1 = (2/3)y \Rightarrow y_2 = (1/2)[(2/3)y] = (1/3)y.$$

Die Verteilung ist daher:

$$y_1 = (2/3)y, \quad y_2 = (1/3)y.$$

Die Gesamtkostenfunktion erhält man durch Einsetzen der Funktionen für y_1 und y_2 in die Kostengleichung, d. h. in die Zielfunktion:

$$c = c_1(y_1) + c_2(y_2) \Rightarrow c(y) = y + \frac{2}{3}y^2.$$

Hinweis: Lesen Sie dazu Varian (1995), Kapitel 20.3.