

12. Übungsblatt - Lösungen

Lösungen:

1.

- (a) Berechnung der Erwartungswerte der Rückzahlungen R der beiden Projekte:
Projekt 1: $ER_1 = 0,5 \cdot 120 + 0,5 \cdot 90 = 105$.
Projekt 2: $ER_2 = 0,3 \cdot 200 + 0,7 \cdot 0 = 60$.
Berechnung der erwarteten Nettoerträge $NE = ER - I$, also ER abzüglich der eingesetzten Mittel I (der Investition):
Projekt 1: $E(NE_1) = ER_1 - I = 105 - 90 = 15$.
Projekt 2: $E(NE_2) = ER_2 - I = 60 - 90 = -30$.
Projekt 2 führt also zu einem erwarteten Verlust.
- (b) Nun wird berücksichtigt, dass am Jahresende die Schulden in Höhe von 100 zurückgezahlt werden sollen. Wenn die Auszahlungen des Projektes höher als die Schulden sind, dann wird die Schuld voll getilgt; den verbleibenden Überschuss erhält der Eigentümer der Firma. Wenn die Auszahlungen des Projektes hingegen niedriger als die Schulden sind, dann geht die Firma bankrott, und der Gläubiger erhält nur einen Teil seiner Schulden, im Extremfall gar nichts zurück. Die Nettoauszahlung für den Eigentümer der Firma, die Differenz zwischen Auszahlung des Projektes und Schuldenstand, kann also nicht negativ werden.
Somit gilt für die Nettoauszahlung NA_1 des Projektes 1:
guter Zustand: $NA_1^G = \max[120 - 100, 0] = 20$;
schlechter Zustand: $NA_1^S = \max[90 - 100, 0] = 0$.
Somit beträgt der Erwartungswert:
 $E(NA_1) = 0,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 0 = 10$.
Für die Nettoauszahlung des Projektes 2 gilt:
guter Zustand: $NA_2^G = \max[200 - 100, 0] = 100$;
schlechter Zustand: $NA_2^S = \max[0 - 100, 0] = 0$.
Der Erwartungswert beträgt dann:
 $E(NA_2) = 0,3 \cdot 100 + 0,7 \cdot 0 = 30$.
Da $E(NA_2) > E(NA_1)$, wird sich der Eigentümer für Projekt 2 entscheiden, obwohl dieses Projekt im Durchschnitt Verluste machen wird ($EN_2 = -30$).

2. Hinweis: Lesen Sie zum besseren Verständnis der Aufgabe Varian (1995), Kapitel 34.7, S. 601 - 605.

Die Produktionsfunktion ist gegeben durch $y = f(x) = x/2$, der Outputpreis beträgt $p = 2$, die Kostenfunktion des Knechtes Karl lautet: $c(x) = x^2/10$.

- (a) Das Problem des Bauern Sepp lautet:

$$\max_{x,s} pf(x) - s \quad s.t. \quad s - c(x) \geq \bar{u}.$$

s ist die Zahlung an den Knecht Karl, die von der Zahl x der Arbeitsstunden abhängen kann. Die Nebenbedingung $s - c(x) \geq \bar{u}$ heißt Partizipationsbedingung (PC) (Participation Constraint) und fordert, dass für den Knecht der Nettovorteil seiner Leistung mindestens so hoch wie sein „Reservationsnutzen“ sein muss, da er sonst nicht arbeiten würde, er also den „Vertrag“, den ihm Bauer Sepp anbietet und der die Zahlung (und die Arbeitsleistung) beinhaltet, nicht akzeptieren würde. Es ist logisch, dass diese Nebenbedingung immer bindet, also mit Gleichheitszeichen gilt, da der Bauer dem Knecht nicht mehr als unbedingt notwendig zahlen wird: $s - c(x) = \bar{u} \Leftrightarrow s = \bar{u} + c(x)$. Einsetzen von s in das Maximierungsproblem des Bauern ergibt dann ein Problem ohne Nebenbedingung:

$$\max_x pf(x) - \bar{u} - c(x).$$

Die FOC lautet dann: $pf'(x) - c'(x) = 0 \Leftrightarrow pf'(x) = c'(x)$. Das Wertgrenzprodukt muss also den Grenzkosten des Knechtes entsprechen. Dies ist genau die Bedingung für die effiziente Inputmenge.

In unserem Fall lautet das Maximierungsproblem von Sepp: $\max_x x - \bar{u} - x^2/10$.

Die FOC ist: $1 - 2x/10 = 0$. (Beachten Sie, dass diese FOC nicht von Karls Reservationsnutzen abhängt: Falls Sepp den Karl anstellt, soll Karl so viele Stunden arbeiten, dass Grenzprodukt und Grenzkosten des Arbeitsinputs übereinstimmen. Karls Reservationsnutzen wird jedoch darauf Einfluss haben, wieviel Sepp ihm bezahlen muss, damit er den Vertrag annimmt – letztlich beeinflusst Karls Reservationsnutzen somit Sepps Gewinn, also auch die Entscheidung, ob dieser Karl einstellen wird.) Die SOC ist erfüllt: $-2/10 < 0$. Aus der FOC folgt dann: $x^* = 5$. Die gewinnmaximierende Inputmenge bei Anstellung von Karl ist also 5 Arbeitsstunden. Karls Anstrengungskosten bei 5 Arbeitsstunden sind gleich $5^2/10 = 2,5$ Euro. Da Karl anderswo keinen Job findet, beträgt sein Reservationsnutzen $\bar{u} = 0$. Der gewinnmaximierende Vertrag verlangt also 5 Arbeitsstunden bei einer Bezahlung (folgt aus der PC) von $s^* = 2,5$ Euro. Sepps Gewinn ist $\pi = pf(x) - s$, hier also mit $x^* = 5$ und $s^* = 2,5$: $\pi^* = x^* - s^* = 5 - 2,5 = 2,5$.

- (b) Wenn die Zahlung vom Output y abhängt, können wir schreiben: $s = s(y)$. Die Zahlung, die Karl bei Annahme des Vertrages und Leistung von x Arbeitsstunden erhält, ist $s[f(x)]$. Dieses Zahlungsschema muss wieder die PC erfüllen. Da außerdem gewünscht wird, dass der Knecht nicht irgendeine, sondern die gewinnmaximierende Inputmenge x^* zur Verfügung stellt, ist zusätzlich zur PC auch die Anreizverträglichkeitsbedingung (IC) (Incentive Compatibility Constraint) zu erfüllen: $s[f(x^*)] - c(x^*) \geq s[f(x)] - c(x) \forall x$. Sie besagt, dass der Nutzen, den der Knecht Karl erzielt, wenn er die effiziente Menge x^* wählt, mindestens so groß sein muss, wie wenn er eine andere Menge x wählt. Das Zahlungsschema (der Vertrag) muss also so gestaltet werden, daß Knecht Karl freiwillig x^* wählt.

Es gibt verschiedene Anreizschemata, die die IC erfüllen (siehe Varian (1995)). Ein möglicher Vertrag wäre z. B., dass Karl einen fixen Betrag B erhält, wenn er die

Outputmenge $y^* = f(x^*)$ oder mehr herstellt; wenn er weniger als y^* herstellt, erhält er nichts. Formal:

$$s(y) = \begin{cases} B, & y \geq y^* \\ 0, & y < y^* \end{cases}$$

Die IC reduziert sich bei diesem Vertrag auf einen Vergleich zwischen einem Input von Null und einem Input von x^* . Denn es lohnt sich auf keinen Fall, *mehr* als x^* bereitzustellen (und so mehr als y^* zu produzieren); und wenn man *weniger* als x^* bereitstellen (also weniger als y^* produzieren) will, dann sollte man angesichts des gegebenen Lohnes von Null wenigstens die Anstrengungskosten minimieren, also den kleinstmöglichen Input wählen. Die IC reduziert sich also auf die Bedingung, dass $B - c(x^*) \geq 0 - c(0)$ oder $B \geq c(x^*)$. Zusätzlich wird Sepp B optimalerweise so wählen, dass Karls PC bei Annahme des Vertrages und Erbringung der gewünschten Leistung gerade erfüllt ist: $B - c(x^*) = \bar{u} \Leftrightarrow B = c(x^*) + \bar{u}$. Da Karls Reservationsnutzen annahmegemäß gleich Null ist, ist $B = 2,5$ Euro.

Sepps Gewinn ist derselbe wie in Teil (a). Dies liegt daran, dass der Output eine *deterministische* Funktion des Inputs ist; selbst wenn Sepp den Input nicht beobachten kann, kann er diesen doch aus dem Output errechnen. Deshalb schneidet Sepp genauso gut ab wie zuvor.

- (c) Da Karl jetzt eine alternative Beschäftigungsmöglichkeit hat, die ihm 1 Euro einbringt, beträgt sein Reservationsnutzen nun $\bar{u} = 1$. Somit folgt für den Betrag B aus der PC: $B - c(x^*) = \bar{u} \Leftrightarrow B - 5^2/10 = 1 \Leftrightarrow B = 3,5$. Dementsprechend ist Sepps Gewinn jetzt nur noch 1,5. (Beachten Sie: Wäre Karls Reservationsnutzen $\bar{u} \geq 2,5$, so würde es sich für Sepp überhaupt nicht mehr lohnen, ihn einzustellen.)

- (d) Nun gilt wieder: $\bar{u} = 0$. Allerdings wird die Wiese nun gegen Zahlung einer Miete (Pacht) R verpachtet. Karl erhält dann den gesamten Output im Wert $pf(x)$ und zahlt dafür an Sepp die Pacht R . Somit lautet der Gewinn/Nutzen des Knechtes Karl: $\pi_K = pf(x) - R - c(x)$. Karl maximiert also: $\max_x \pi_K = x - R - x^2/10$. Die FOC lautet: $1 - 2x/10 = 0$, die SOC ist erfüllt: $-2/10 < 0$. Aus der FOC folgt dann Karls optimale Wahl: $x^* = 5$. Karl wird also freiwillig die effiziente Menge wählen; die IC ist somit erfüllt.

Die für Sepp optimale Pacht R wird dann aus der PC bestimmt: $pf(x^*) - R - c(x^*) = \bar{u}$.

Hier: $x^* - R - (x^*)^2/10 = 0 \Leftrightarrow 5 - R - 5^2/10 = 0 \Leftrightarrow R = 2,5$.

Die Pachtzahlung, die Karl an Sepp leisten muss, wird also 2,5 Euro betragen. Dadurch, dass Karl nach Annahme des Pachtvertrages quasi zum Eigentümer wird, hat er die effizienten Produktionsanreize, wird also den effizienten Bruttogewinn (vor Abzug der Pacht) erwirtschaften. Die Differenz zwischen diesem Bruttogewinn und Karls Reservationsnutzen kann Sepp durch die Pacht abschöpfen.

3.

- (a) Alberts (A) Anstrengung ist direkt beobachtbar; die Information hinsichtlich des Anstrengungsniveaus ist also symmetrisch verteilt (hier volle Information). Somit kann Patrizia (P) mit A einen vor Gericht durchsetzbaren Vertrag auf bestimmte Werte von a (hier $a_0 = 1$ oder $a_1 = 2$) schließen. Da a beobachtbar und verifizierbar ist, besteht kein Anreizproblem; wir brauchen also keine Anreizverträglichkeitsbedingung (IC) zu berücksichtigen.

Hingegen wird P dem A einen möglichst geringen Lohn w zahlen wollen, um ihren Gewinn möglichst hoch zu halten. Daher ist die Partizipationsbedingung (PC) bindend.

Wir suchen nun die Löhne w_0^s und w_1^s , $s = H, N$, die P zu zahlen bereit ist, wenn A das Anstrengungsniveau $a_0 = 1$ oder $a_1 = 2$ wählt. Hierzu maximieren wir für beide Anstrengungsniveaus jeweils Ps erwarteten Gewinn unter der Nebenbedingung, dass A den Vertrag annimmt (PC). Durch Vergleich der erwarteten Gewinne finden wir schließlich den Vertrag, den P anbieten wird.

Allgemein ist Ps Gewinnmaximierungsproblem:

$$\max_{w_i^H, w_i^N} EG_i = \pi_i^H (x_H - w_i^H) + \pi_i^N (x_N - w_i^N) \text{ s.t. } \pi_i^H \sqrt{w_i^H} + \pi_i^N \sqrt{w_i^N} - a_i = \underline{U}; i = 0, 1$$

Hierzu verwenden wir einen Lagrange-Ansatz:

$$L = \pi_i^H (x_H - w_i^H) + \pi_i^N (x_N - w_i^N) - \lambda (a_i - \pi_i^H \sqrt{w_i^H} - \pi_i^N \sqrt{w_i^N}), i = 0, 1.$$

Die FOC lauten:

$$\frac{\partial L}{\partial w_i^H} = -\pi_i^H + \lambda \pi_i^H 0,5 \frac{1}{\sqrt{w_i^H}} = 0 \Leftrightarrow 0,5\lambda = \sqrt{w_i^H} \quad (I)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_i^N} = -\pi_i^N + \lambda \pi_i^N 0,5 \frac{1}{\sqrt{w_i^N}} = 0 \Leftrightarrow 0,5\lambda = \sqrt{w_i^N} \quad (II)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(a_i - \pi_i^H \sqrt{w_i^H} - \pi_i^N \sqrt{w_i^N}) = 0 \quad (III)$$

Aus (I) und (II) folgt:

$$\sqrt{w_i^H} = \sqrt{w_i^N} \Leftrightarrow w_i^H = w_i^N = w_i, i = 0, 1.$$

Eingesetzt in die PC (III) erhalten wir dann den gewinnmaximalen Lohn w_i :

$$(a_i - \pi_i^H \sqrt{w_i} - \pi_i^N \sqrt{w_i}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_i = \sqrt{w_i} \Leftrightarrow$$

$$w_i = a_i^2, i = 0, 1.$$

Der optimale Vertrag unter vollständiger Information zahlt also einen vom Output unabhängigen Lohn; der Lohn stellt nur auf die beobachtbare und verifizierbare Anstrengung a_i ab. Der Lagrange-Ansatz zeigt, was wir in der Vorlesung schon weniger formal festgestellt hatten: Wenn kein Anreizproblem vorliegt, dann sollte die risikoneutrale Seite die risikoaverse Seite voll versichern; da letztere keinerlei

Risiko tragen soll, erhält sie für ihre (verifizierbare) Anstrengung einen ergebnisunabhängigen Lohn.

Mit unseren Zahlen erhalten wir:

Wird $a_0 = 1$ festgeschrieben (Vertrag 1), beträgt der optimale Lohn $w_0 = \underline{w} = 1$;

wird $a_1 = 2$ festgeschrieben (Vertrag 2), beträgt der optimale Lohn $w_1 = \bar{w} = 2^2 = 4$.

Patrizias erwartete Gewinne mit den beiden Verträgen 1 und 2 belaufen sich auf:

$$EG_1 = 0,4(12 - 1) + 0,6(4 - 1) = 6,2;$$

$$EG_2 = 0,8(12 - 4) + 0,2(4 - 4) = 6,4.$$

Da $EG_2 > EG_1$, wird P dem A Vertrag 2 mit ($\bar{w} = 4$, $a_1 = 2$) anbieten; denn der Vertrag, der die Anstrengung $a_1 = 2$ verlangt, gibt P den höheren erwarteten Gewinn.

- (b) Nun ist As Anstrengung nicht direkt beobachtbar; es liegt asymmetrische Information vor: A kennt seine Anstrengung, P jedoch nicht.

Wieder berechnen wir für beide (nicht beobachtbaren) Anstrengungsniveaus die optimalen Verträge und vergleichen dann die damit einhergehenden erwarteten Gewinne. P wird dann den Vertrag mit dem höheren erwarteten Gewinn wählen.

Wenn P erreichen will, dass A das Niveau $a_0 = 1$ wählt, bietet sie ihm einfach einen Vertrag zum Lohn $\underline{w} = 1$ an und erzielt dann einen erwarteten Gewinn in Höhe von $EG_1 = 6,2$ (siehe (a)). Bei einem ergebnisunabhängigen Lohn hat A nämlich keinen Anreiz, sich stark anzustrengen ($a_1 = 2$ zu wählen).

Wenn P einen für sie optimalen Vertrag schreiben will, bei dem es für A optimal ist, sich stark anzustrengen ($a_1 = 2$ zu wählen), muss sie *zwei* Bedingungen beachten:

Anreizverträglichkeitsbedingung (IC):

As erwarteter Nutzen bei Anstrengungsniveau a_1 muss mindestens so hoch sein wie bei -niveau a_0 . Also:

$$0,8\sqrt{w_H} + 0,2\sqrt{w_N} - 2 \geq 0,4\sqrt{w_H} + 0,6\sqrt{w_N} - 1 \quad (*).$$

Partizipationsbedingung (PC):

As erwarteter Nutzen bei Annahme des Vertrages und Anstrengungsniveau a_1 muss mindestens so hoch sein wie sein Reservationsnutzen \underline{U} ; denn sonst lehnt A den Vertrag ab. Also:

$$0,8\sqrt{w_H} + 0,2\sqrt{w_N} - 2 \geq 0 \quad (**).$$

Man könnte Ps Problem wieder per Lagrange-Ansatz (nun mit zwei Nebenbedingungen) lösen. Wir nehmen hier aber eine Abkürzung und nutzen einfach aus, dass in einem Optimum für P beide Bedingungen mit Gleichheitszeichen gelten, also binden.

Wir haben dann *zwei* Gleichungen (*) und (**) mit zwei Unbekannten. Wenn wir $z_H = \sqrt{w_H}$, $z_N = \sqrt{w_N}$ setzen, erhalten wir:

$$0,4z_H - 0,4z_N = 1 \quad (*)$$

$$0,8z_H + 0,2z_N = 2 \quad (**).$$

Dieses (lineare) Gleichungssystem kann z. B. mit einem Substitutionsverfahren gelöst werden. Wir erhalten:

$$z_H = 2,5; \quad z_N = 0.$$

Aus $z_H = \sqrt{w_H}$, $z_N = \sqrt{w_N}$ erhalten wir dann die vom Output abhängigen Löhne:

$$w_H = 6,25; \quad w_N = 0.$$

In Worten: P zahlt A beim Eintreten des Outputniveaus $x_H = 12$ einen Lohn $w_H = 6,25$, beim Eintreten des Outputniveaus $x_N = 4$ einen Lohn von $w_N = 0$.

Ps erwarteter Gewinn unter diesem Vertrag ist gegeben als:

$$EG_2 = 0,8(12 - 6,25) + 0,2(4 - 0) = 5,4.$$

Da nun $EG_1 = 6,2 > EG_2 = 5,4$ ist, wird P Vertrag 1 mit $\underline{w} = 1$ anbieten, der zur Folge hat, dass A das für ihn dann optimale Anstrengungsniveau $a_0 = 1$ wählt. Vertrag 2, der A dazu veranlasst, $a_1 = 2$ zu wählen, sich also stark anzustrengen, ist für P nicht lohnend, da ihr erwarteter Gewinn aus diesem Vertrag niedriger ist.