

# Aufgabenblatt 3

## Aufgabe 1

a) Graphik

b)

$$\begin{aligned}\pi_1 &= p(x_1 + x_2) * x_1 - cx_1 \\ &= (a - b(x_1 + x_2))x_1 - cx_1 \\ &= ax_1 - bx_1^2 - bx_1x_2 - cx_1\end{aligned}$$

Bedingung erster Ordnung für Gewinnmaximierung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} &= a - 2bx_1 - bx_2 - c = 0 \\ a - c - bx_2 &= 2bx_1 \\ x_1 &= \frac{a - c - bx_2}{2b} = x_1^*(x_2)\end{aligned}$$

Analog gilt wegen Symmetrie:

$$x_2^*(x_1) = \frac{a - c - bx_1}{2b}$$

Auflösen des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-c}{2b} \\ \frac{a-c}{2b} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{a-c}{2b} & \frac{1}{2} \\ \frac{a-c}{2b} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{4b}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{\frac{a-c}{4b}}{\frac{3}{4}} = \frac{a-c}{3b} \end{aligned}$$

Analog:

$$x_2 = \frac{a-c}{3b}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow p &= a - b \left( \frac{2(a-c)}{3b} \right) \\
&= a - \frac{2(a-c)}{3} \\
&= \frac{3a - 2a + 2c}{3} = \frac{a + 2c}{3} > c \\
&\quad (\text{weil } a > c \Rightarrow p > GK)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \pi_1 &= \frac{a + 2c}{3} \cdot \frac{a-c}{3b} - c \frac{a-c}{3b} \\
&= \frac{a + 2c - 3c}{3} \cdot \frac{a-c}{3b} \\
&= \frac{a-c}{3} \cdot \frac{a-c}{3b} = \frac{(a-c)^2}{9b}
\end{aligned}$$

Analog:

$$\pi_2 = \frac{(a-c)^2}{3b}$$

(c) Vergleich mit Konkurrenzlösung:

Es gilt  $p = c$

$$\Rightarrow a - bx = c$$
$$\frac{a - c}{b} = x$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{a - c}{2b} \quad (\text{größer als im Nash-GGW})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 &= p \cdot x_1 - c \cdot x_1 \\ &= c \cdot x_1 - c \cdot x_1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad \pi^K = 0$$

Kartell-Lösung:

Maximierung des gemeinsamen Monopol-Gewinnes:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 \rightarrow \max!$$

$$\begin{aligned} \pi &= p(x) \cdot x - c \cdot x && (\text{mit } x = x_1 + x_2) \\ &= ax - bx^2 - cx \end{aligned}$$

F.O.C. für Gewinnmaximum:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = a - 2bx - c = 0$$

$$x^M = \frac{a - c}{2b}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow p^M &= a - b \frac{a - c}{2b} \\ &= \frac{a + c}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi^M &= \frac{a + c}{2} \cdot \frac{a - c}{2b} - c \frac{a - c}{2b} \\ &= \frac{(a - c)^2}{4b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \pi^K &< \pi^N < \pi^M \\ p^K = 0 &< p^N < p^M \\ x^K &> x^N > x^M\end{aligned}$$

Die Kartell-Lösung ist kein Gleichgewicht, weil der Grenzgewinn einer einzelnen Firma bei

$$x_1 = x_2 = \frac{x^M}{2}$$

positiv ist. Durch eine Mengenerhöhung steigt der eigene Gewinn, obwohl der Gesamtgewinn sinkt.

Da dieser externe Effekt auf das andere Unternehmen nicht berücksichtigt wird, ergibt sich das für die beiden Unternehmen sub-optimale Nash-Gleichgewicht.

## Aufgabenblatt 3

### Aufgabe 2

a)

Die Kartelllösung ist kein Nash-Gleichgewicht und deshalb nicht durchsetzbar.

Spielt ein Spieler  $q^M/2$  (wie vereinbart), lohnt sich für den anderen Spieler immer die Abweichung von der vereinbarten Menge.

b)

i) Für Spieler  $i$ :

$$q_{it} = \begin{cases} \frac{q^M}{2} & \text{falls } q_{j,t-1} = \frac{q^M}{2} \\ q^N & \text{falls } q_{j,t-1} \neq \frac{q^M}{2} \end{cases}$$

Analog für Spieler  $j$ !

ii) Gewinn eines Spielers bei

- Kartelllösung:  $\pi^K$

- Nashlösung:  $\pi^N$

Falls Spieler  $i$  in Periode  $t = 0$  abweicht,  
und Spieler  $j$  die Vereinbarung einhält:

Abweichungsgewinn:  $\pi^\Delta > 0$  in  $t = 0$

In jeder folgenden Periode macht Spieler  $i$   
Verlust, weil das Nash-GGW aus dem Stufen-  
spiel realisiert wird:

Verlust:  $\pi^N - \pi^K < 0$  in  $t = 1 \dots \infty$

Abweichung lohnt sich, falls:

$$\pi^\Delta + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t (\pi^N - \pi^K) > 0$$

$$\pi^\Delta > -(\pi^N - \pi^K) \cdot \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \delta^t}_{1/r}$$



$$r > \frac{-(\pi^N - \pi^K)}{\pi\Delta}$$

$$r > \frac{\pi^K - \pi^N}{\pi\Delta} > 0$$

Unterschreitet der Zinssatz diese Schranke (d.h. ist der Diskontfaktor groß genug), so wird nicht abgewichen, weil der Barwert der zukünftigen Verluste den einmaligen Gewinn mehr als aufwiegt.

$\gamma$ ) Die Lösung ist TSP, da die Drohung glaubwürdig ist.

- Falls  $j$  in  $t$  abweicht, spielt  $i$  nur noch die Nash-Menge;  $j$  auch, weil beste Antwort.  
 $\Rightarrow$  Nash-GGW in jedem weiteren Teilspiel.
- Falls  $j$  nicht abgewichen ist, ist  $q^M/2$  beste Antwort.  
 $\Rightarrow$  Nash-GGW

Problem der *Wiederverhandlungsstabilität*:

$j$  kann sich denken in  $t$  abzuweichen und in  $t + 1$  wird dann neu verhandelt.

Für beide ist es dann besser, wieder die Kartellösung zu spielen.

c) Minimax-Strategie:

i)

$$p = 1 - x, \quad c = 0$$

$$\begin{aligned}\pi_2 &= (1 - x_1 - x_2) \cdot x_2 \\ &= x_2 - x_1 x_2 - x_2^2\end{aligned}$$

F.O.C.

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = 1 - x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\longrightarrow x_2^* = \frac{1 - x_1}{2}$$

$$\pi_2^* = \frac{1 - 2x_1 + x_1^2}{4}$$

**Minimax:**

$$\min_{x_1} \pi_2^* !$$

$$\text{F.O.C. } 1/4 \cdot (-2 + 2x_1) = 0$$

$$x_1^* = 1$$

$$\longrightarrow x_2^* = 0; p = 0; \pi_1 = \pi_2 = 0$$

ii)

Das Nash GGW ist nicht TSP, da in den Teilspielen in denen bestarft wird, kein Nash-GGW vorliegt. (Minimax ist kein Nash-GGW).

iii) Die Menge der Zinssätze für die sich so die Kartellösung erhalten läßt ist größer als bei "Nash-Bestrafung", da der Abweichungsverlust in jeder Folgeperiode nun größer ist, und sich der Abweichungsgewinn nicht verändert hat.

# Aufgabenblatt 3

## Aufgabe 3

$$\pi_i = \left(a - \sum_{j=1}^n x_j\right) \cdot x_i$$
$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = \left(a - \sum x_j\right) - x_i = 0$$

Symmetrie:  $x_i = x_j \quad \forall i, j$

$$\Rightarrow \frac{\partial \pi_c}{\partial x_i} = a - (n + 1)x_i = 0$$

$$x_i = \frac{a}{n + 1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{n}{n + 1} \cdot a$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \quad p &= a - \frac{n}{n+1} \cdot a \\
 &= \frac{n+1-n}{n+1} \cdot a \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot a
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = 0$$

## Aufgabenblatt 3

### Aufgabe 4

a) Firma 1 und Firma 2 wählen simultan jeweils ihren **Preis**:

$p_1 = p_2 = c$  ist ein Nash-Gleichgewicht

Es ist auch das einzige Nash-GG:

- $p_1 = p_2 > c$   
Anreiz (für beide Firmen) zur Preissenkung und Übernahme des gesamten Marktes.
- $p_1 > p_2 > c$   
Firma 1 setzt  $p_1 = p_2 - \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) und übernimmt den Markt.

- $p_1 > p_2 = c$ ? Anreiz zur Preissenkung auf  $p_1 = c$ .

b) Bertrand-Wettbewerb mit differenzierten Gütern.

$$x_1 = \alpha - \beta p_1 + \gamma p_2$$

$$x_2 = \alpha - \beta p_2 + \gamma p_1$$

Firma 1:

$$\max_{p_1} (\alpha - \beta p_1 + \gamma p_2)(p_1 - c)$$

$$\alpha - 2\beta p_1 + \gamma p_2 + \beta c = 0$$

Firma 2:

$$\max_{p_2} (\alpha - \beta p_2 + \gamma p_1)(p_2 - c)$$

$$\alpha - 2\beta p_2 + \gamma p_1 + \beta c = 0$$

$$p_1 = p_2 = \frac{\alpha + \beta c}{2\beta - \gamma}$$

Vergleich mit (a):

Falls  $\beta = \gamma$  (Symmetrie):  $p_1 = p_2 = \frac{\alpha}{\beta} + c > c$



## Aufgabenblatt 3

### Aufgabe 5

a) GK=0

⇒ Sozial optimal ist  $p = 0$  und  $x = 1$

b)

$$\begin{aligned}\pi &= x \cdot p \\ &= (1 - p) \cdot p \\ &= p - p^2 \rightarrow \text{Max}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = 1 - 2p = 0$$

$$\Rightarrow p^m = 1/2 \quad x^m = 1/2$$

c) Jetzt zwei Unternehmen.

Nachfrage:  $x = 1 - \underbrace{p_1 - p_2}_{p(\text{wg. Komplemente})}$

für ein Unternehmen:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= (1 - p_1 - p_2)p_1 \\ &= p_1 - p_1^2 - p_1p_2 \rightarrow \text{Max}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 1 - 2p_1 - p_2 = 0$$

wegen Symmetrie:  $p_1 = p_2$

$$\Rightarrow p_1 = 1/3$$

$$p_2 = 1/3$$

$$p = 2/3$$

Schlechter als bei Monopol.

## Aufgabenblatt 3

### Aufgabe 6

Marginaler Konsument:

$$\begin{aligned}v - ax - p_A &= v - a(1 - x) - p_B \\-ax - p_A &= -a + ax - p_B \\a + p_B - p_A &= 2ax \\x^0 &= \frac{a + p_B - p_A}{2a}\end{aligned}$$

Gewinn Firma A:

$$\begin{aligned}\pi_A &= \int_0^{x^0} p_A \cdot f(x) dx = p_A \left( \frac{a + p_B - p_A}{2a} \right) \\\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} &= \frac{a + p_B - p_A}{2a} + p_A \left( -\frac{1}{2a} \right) \\&= \frac{a + p_B - 2p_A}{2a} = 0 \\a + p_B - 2p_A &= 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Gewinn Firma B:

$$\pi_B = \int_{x^0}^1 p_B \cdot f(x) dx = p_B \left( 1 - \frac{a + p_B - p_A}{2a} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_B}{\partial p_B} &= 1 - \frac{a + p_B - p_A}{2a} + p_B \left( -\frac{1}{2a} \right) \\
&= 1 - \frac{a + 2p_B - p_A}{2a} \\
&= \frac{a - 2p_B + p_A}{2a} = 0 \\
&= a - 2p_B + p_A = 0 \quad (2)
\end{aligned}$$

(1) und (2)

$$\begin{aligned}
a + p_B - 2p_A &= a - 2p_B + p_A \\
p_A &= p_B
\end{aligned}$$

Der marginale Konsument

$$x^0 = \frac{a + p_A - p_A}{2a} = \frac{1}{2}$$

ist gerade indifferent zwischen A, B und nicht-kaufen.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u = v - ax^0 - p_A &= 0 \\
p_A = p_B &= v - \frac{a}{2}
\end{aligned}$$