

Aufgabenblatt 6

1. Ein Individuum hat die Nutzenfunktion

$$u(x) = \frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}.$$

- (a) Berechnen Sie die Arrow-Pratt Maße der absoluten und relativen Risikoaversion für die angegebene Nutzenfunktion.
- (b) Nehmen Sie an, daß das Individuum ein Anfangsvermögen von w hat. Es kann einen Anteil α in ein riskantes Wertpapier mit der (unsicheren) Rendite \tilde{r} mit positivem Erwartungswert investieren. Der Rest wird mit dem Zinssatz $r = 0$ verzinst. Zeigen Sie daß der in das Wertpapier investierte Anteil α unabhängig von w ist.
- (c) Begründen Sie verbal, daß für $E(\tilde{r}) = 0$ gilt, daß $\alpha = 0$.
2. Gegeben sei ein Prinzipal, dessen Firma ein Angestellter (Agent) leitet. Der Agent kann zwischen zwei Anstrengungsniveaus wählen, die vom Prinzipal nicht beobachtet werden können. Das Anstrengungsniveau $a_H = 3$ führt mit Wahrscheinlichkeit 0,2 zu einem Bruttogewinn von $x_1 = 100$ und mit Wahrscheinlichkeit 0,8 zu $x_2 = 200$. Wenn der Agent ein niedriges Anstrengungsniveau, $a_L = 0$, wählt, sind die Wahrscheinlichkeiten gerade umgekehrt, d.h. 0,8 für x_1 und 0,2 für x_2 . Der Agent ist risikoavers mit der Nutzenfunktion $U(w, a) = \sqrt{w} - a$, wobei w der Lohn des Agenten ist. Der Reservationsnutzen des Agenten ist $\bar{U} = 4$. Der Prinzipal ist risikoneutral und hat die Nutzenfunktion $V = x - w$.
- (a) Stellen Sie sich vor, daß der Prinzipal die Aktion beobachten kann. Welchen Vertrag wird er dann dem Agent anbieten?

- (b) Was ist der kostengünstigste Vertrag, der den Agent dazu bringt, die Aktion a_L zu wählen?
 - (c) Stellen Sie sich vor, der Prinzipal will a_H zu möglichst niedrigen Kosten implementieren. Formulieren Sie das Optimierungsproblem des Prinzipals. Argumentieren Sie verbal, welche Nebenbedingungen binden müssen. Berechnen Sie das optimale Anreizschema, das a_H implementiert.
 - (d) Welches Anstrengungsniveau will der Prinzipal implementieren? Zeigen Sie graphisch, daß dadurch, daß a nicht beobachtet werden kann, ein Wohlfahrtsverlust gegenüber der Situation in (a) entsteht.
3. Gegeben sei ein Prinzipal, dessen Firma ein Angestellter (Agent) leitet. Der Agent kann zwischen zwei Anstrengungsniveaus wählen, die vom Prinzipal nicht beobachtet werden können. Das Anstrengungsniveau $a_H = 1$ führt mit Wahrscheinlichkeit 0,1 zu einem Bruttogewinn von $x_1 = 1000$ und mit Wahrscheinlichkeit 0,9 zu $x_2 = 1400$. Wenn der Agent ein niedriges Anstrengungsniveau, $a_L = 0$, wählt, sind die Wahrscheinlichkeiten 0,2 für x_1 und 0,8 für x_2 . Der Agent ist risikoavers mit der Nutzenfunktion $U(w, a) = \sqrt{w} - a$, wobei w der Lohn des Agenten ist. Der Reservationenutzen des Agenten ist $\bar{U} = 18$. Der Prinzipal ist risikoneutral und hat die Nutzenfunktion $V = x - w$.
- (a) Stellen Sie sich vor, daß der Prinzipal die Aktion beobachten kann. Welchen Vertrag wird er dann dem Agent anbieten?
 - (b) Der Prinzipal will a_H zu möglichst niedrigen Kosten implementieren; die Aktion des Agenten ist nun nicht mehr beobachtbar. Formulieren Sie das Optimierungsproblem des Prinzipals. Zeigen Sie, da es nicht möglich ist, da im Optimum nur die Teilnahmebeschränkung, nicht aber die Anreizbeschränkung bindet.
 - (c) Berechnen Sie das optimale Anreizschema, das a_H implementiert. (Sie dürfen davon ausgehen, da beide Beschränkungen binden).
 - (d) Was ist der optimale Vertrag bei Nichtbeobachtbarkeit der Aktion des Agenten? Wie hoch sind die Agency-Kosten (der Wohlfahrtsverlust

durch die Nichtbeobachtbarkeit der Aktion)?

- (e) Nehmen Sie an, da (bei irgendeinem beliebigen Problem, nicht unbedingt hier) der Prinzipal bei Beobachtbarkeit der Aktion a_L implementieren möchte. Wieso kann es dann bei Nicht-Beobachtbarkeit niemals optimal sein, a_H zu implementieren?
- (f) Beschreiben Sie kurz, was die Hauptaussage des Principal-Agent-Modells ist.

4. Auf dem Markt für Gebrauchtwagen werden Autos zum einheitlichen Preis p gehandelt. Dieser Preis wird von allen Individuen als gegeben betrachtet. Jedes Auto ist entweder gut (mit Wahrscheinlichkeit 0.5) oder schlecht. Die Qualitäten der Autos sind unabhängig. Es gibt 100 *risikoneutrale* Autoverkäufer, die jeweils 1 Auto verkaufen wollen. Der Reservationspreis eines Verkäufers beträgt 0 DM für ein schlechtes Auto und 5000 DM für ein gutes Auto. Es gibt 120 *risikoneutrale* Autokäufer, die daran interessiert sind, jeweils 1 Auto zu kaufen. Ihre Zahlungsbereitschaft beträgt 6000 DM für ein gutes und 1000 DM für ein schlechtes Auto.

- (a) Angenommen weder Käufer noch Verkäufer kennen die Qualität eines Autos. Wie hoch ist dann der Gleichgewichtspreis? Ist das Gleichgewicht effizient?
- (b) Angenommen, die Verkäufer kennen die Qualität ihres Autos, die Käufer aber nicht. Nehmen Sie weiterhin an, daß die Käufer den Reservationspreis der Verkäufer kennen. Welche Marktsituation ergibt sich? Ist sie effizient?
- (c) Angenommen, die Verkäufer kennen die Qualität ihres Autos nicht, können ihr Auto aber von einem Sachverständigen testen lassen. Ein gutes Auto wird mit einer Wahrscheinlichkeit von α für gut befunden, ein schlechtes Auto wird mit einer Wahrscheinlichkeit von β für gut befunden ($\alpha > \beta$). Es sei unterstellt, daß die Käufer von einem solchen Test nichts wissen, d.h. sie haben weder die Möglichkeit einen Test durchzuführen, noch wissen sie, daß die Produzenten dies tun. Berechnen Sie den Preis $p(\alpha, \beta)$, zu dem ein Produzent gerade noch

bereit sein wird, ein Auto, das vom Sachverständigen für gut befunden wurde, auf dem Markt anzubieten. Angenommen, $\beta = 3/28$, was ist dann der maximale Wert von α , bei dem es noch einen Gleichgewichtspreis gibt, zu dem alle Autos zum Verkauf angeboten werden? Was für ein Gleichgewicht ergibt sich, wenn α über diesem Wert liegt? Ist dieses Gleichgewicht effizient?

- (d) Nehmen Sie nun an, die Käufer wissen von dem Test (d.h. sie kennen die Testwahrscheinlichkeiten $\alpha = 0.5$ und $\beta = 0.25$) und der Verkäufer habe die Möglichkeit, sich ein positives Testergebnis seines Autos durch ein Qualitätsgutachten des Sachverständigen bestätigen zu lassen. Desweiteren sei die Annahme eines einheitlichen Preises aufgegeben, und es sei unterstellt, daß es einen Preis für Autos mit Gutachten und einen Preis für Autos ohne Gutachten gebe. Erklären Sie, warum im Gleichgewicht alle Autos gehandelt werden und alle Verkäufer mit einem positiven Testergebnis dieses durch ein Gutachten bestätigen lassen werden. Bestimmen Sie die Gleichgewichtspreise. Ist das Gleichgewicht effizient?