

Geometrische Summenformel

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 \Leftrightarrow q^{n+1}}{1 \Leftrightarrow q}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(1 \Leftrightarrow q) \cdot \sum_{i=0}^n q^i &= (1 \Leftrightarrow q) \cdot (q^0 + \dots + q^n) \\ &= q^0 \Leftrightarrow q^1 + q^1 \dots \Leftrightarrow q^n + q^n \Leftrightarrow q^{n+1} \\ &= 1 \Leftrightarrow q^{n+1}\end{aligned}$$

q.e.d.

Für $0 < q < 1$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \Leftrightarrow q^{n+1}}{1 \Leftrightarrow q} = \frac{1}{1 \Leftrightarrow q}$$

Differentiationsregeln

1) Summenregel:

$$\frac{\partial[f(x) + g(x)]}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

2) Produktregel:

$$\frac{\partial(f(x) \cdot g(x))}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

3) Quotientenregel:

$$\frac{\partial\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\partial x} = \frac{g(x) \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Leftrightarrow f(x) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x}}{(g(x))^2}$$

4) Kettenregel:

$$\frac{\partial f(g(x))}{\partial x} = \frac{\partial f(g(x))}{\partial g(x)} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

Integralrechnung

Problem: Wie groß ist die Fläche unterhalb einer Funktion?

Lösung: Berechnung über das **Integral**

Mathematischer Hintergrund: siehe beliebiges Buch zur höheren Mathematik!

Beispiel:

$$\int_a^b f(x)dx \quad (\text{Bestimmtes Integral})$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) \Leftrightarrow F(a)$$

$F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$ und muß die Eigenschaft $\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x)$ erfüllen.

Die Stammfunktion wird an der oberen und der unteren Grenze ausgewertet und die Differenz gebildet.

Beispiel:

$$\int f(x)dx \quad (\text{Unbestimmtes Integral})$$

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Das unbestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ liefert die Menge aller Stammfunktionen $F(x)$, die sich nur durch eine Konstante c (die bei der Differentiation wegfällt) unterscheiden.

Integrationsregeln:

1. Das Integral ist ein linearer Operator:

Es gilt also:

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

- Konstante Faktoren können aus dem Integral herausgenommen werden.
- Das Integral über eine Summe von Funktionen ist gleich der Summe der Integrale über diese Funktionen.

2. Integration von Polynomen:

$$\begin{aligned}\int x^n dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad \text{für } n \neq -1 \\ \int x^{-1} dx &= \ln x + c\end{aligned}$$

3. Partielle Integration:

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Leftrightarrow \int f(x) \cdot g'(x) dx + c$$

Beweis:

$$F(x) = f(x) \cdot g(x) \Leftrightarrow \int f(x) \cdot g'(x) dx + c$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot g'(x) \\ &= f'(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

Ableitung der Stammfunktion liefert den Integranden.

Beispiel:

Bestimmen Sie: $\int x \cdot e^x dx$

Setze:
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \\ g(x) &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int x \cdot e^x dx &= e^x \cdot x \Leftrightarrow \int e^x dx + c \\ &= x e^x \Leftrightarrow e^x + c \\ &= (x \Leftrightarrow 1) e^x + c \end{aligned}$$

Integralfunktionen

(Integralgrenze als unabhängige Variable der Funktion)

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{heißt Integralfunktion}$$

Es gilt:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} = f(x)$$

Die Ableitung der Integralfunktion nach der oberen Grenze ist gleich dem Wert der Integranden an der oberen Grenze.

Beweis:

$$\begin{aligned} G(x) &= F(x) \Leftrightarrow F(a) \\ G'(x) &= F'(x) = f(x) \end{aligned}$$

(F Stammfunktion von f)

Analog gilt für

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt$$
$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} = \Leftrightarrow f(t)$$

Falls die Grenze eine Funktion von x ist, so gilt mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^{g(x)} f(t) dt = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx$$

Die Ableitung darf unter das Integralzeichen gezogen werden.

Optimierung

Terminologie und Überblick

$\max_x f(x, r)$ (Max. ohne NB)

oder

$\max_x f(x, r)$ s.t. $g(x, r) = 0$
oder $g(x, r) \geq 0$
(Max. mit NB)

$f(\cdot)$

Zielfunktion

$g(\cdot)$

Nebenbedingung

x

Wahlvariable; endogen

r

Parameter; exogen

$x(r)$

Lösung; endogene Variablen
als Funktion der
exogenen Parameter

$V(r) = f(x(r), r)$ Wertfunktion

Maximierung ohne Nebenbedingung (1 Variable)

Näherungsweise gilt

$$f(x) = f(x^0) + f'(x^0)(x \Leftrightarrow x^0) + \frac{1}{2}f''(x^0)(x \Leftrightarrow x^0)^2$$

(Taylor-Reihen-Approximation)

Für x „nahe“ x^0 ist der 3. Term auf der rechten Seite sehr viel kleiner als der 2. Term

$$f(x) \simeq f(x^0) + f'(x^0)(x \Leftrightarrow x^0)$$

x^0 stellt ein lokales Maximum dar, falls ein $\delta > 0$ existiert, so daß $f(x^0) \geq f(x)$ für alle x mit der Eigenschaft $\|x \Leftrightarrow x^0\| \leq \delta$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß x^0 ein Maximum ist, ist daher $f'(x^0) = 0$.

Diese Bedingung ist hinreichend, falls $f''(x^0) < 0$.

Maximierung ohne Nebenbedingung (mehrere Variablen)

Notwendige Bedingung:

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall x_i$$

Analog zum eindimensionalen Fall gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x^0) &+ Df(x^0)(x \Leftrightarrow x^0) \\ &+ \frac{1}{2}(x \Leftrightarrow x^0)^t D^2 f(x^0)(x \Leftrightarrow x^0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Df(x^0) &= \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \\ D^2 f(x^0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung:

$$(x \Leftrightarrow x^0)^t D^2 f(x^0)(x \Leftrightarrow x^0) \leq 0 \quad \forall x$$

Matrix $D^2 f(x^0)$ heißt dann “negativ (semi)definit” .

Hinreichende Bedingungen bei Maximierung einer Funktion mit mehreren Variablen:

- Überprüfen der negativen Semidefinitheit anhand von Determinantenbedingungen.
Für eine Funktion von 2 Variablen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \leq 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \geq 0$$

- Es gibt nur einen Punkt, der die Bedingungen erster Ordnung erfüllt und aus anderen Überlegungen ist klar, daß es ein Maximum geben muß.
- Wir nehmen an (oder können zeigen), daß die Zielfunktion streng konkav ist.

Konkavität

Definition: Eine Funktion $f(x)$ heißt konkav, falls

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

für alle x, y und $0 < \lambda < 1$. Falls für alle $x \neq y$ die strenge Ungleichung („ $>$ “) gilt, heißt $f(x)$ streng konkav.

Falls $f(x)$ überall differenzierbar ist, so ist $f(x)$ konkav falls $f''(x) \leq 0$ für alle x .

Eine Funktion $h(x)$ heißt (streng) konvex, falls $\Leftrightarrow h(x)$ (streng) konkav ist.

Konvexität von Mengen

Eine Menge K ist konvex falls für 2 beliebige Elemente x, y aus K immer gilt:

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in K \quad \text{für } 0 \leq \lambda \leq 1$$

Geometrische Interpretation

Beispiele für konvexe Mengen:

$$\{x \mid ax = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots \geq k\}$$

Falls die Zielfunktion konkav ist und die zulässige Menge konvex ist, so ist ein stationärer Punkt ein Maximum, d.h. die Bedingungen erster Ordnung sind hinreichend für ein Maximum.

Ist die Zielfunktion streng konkav, dann gibt es nicht mehr als ein Maximum.

Begründung:

Definition Bessermenge:

$$B(x^0) = \{x \mid f(x) \geq f(x^0)\}$$

Alle Bessermengen sind konvex, falls $f(\cdot)$ konkav ist.

Beweis: Es seien $v, w \in B(x^0)$; zu zeigen ist, daß jedes $z = \lambda v + (1 - \lambda)w$ Element von $B(x^0)$ ist.

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\lambda v + (1 - \lambda)w) \geq \lambda f(v) + (1 - \lambda)f(w) \\ &\geq \lambda f(x^0) + (1 - \lambda)f(x^0) = f(x^0) \end{aligned}$$

Ein (inneres) Minimum ist nicht kompatibel mit konvexen Bessermengen (warum?).

2 lokale Maxima sind nicht kompatibel mit konvexen Bessermengen.

Quasikonkavität

Eine sehr nützliche Eigenschaft konkaver Funktionen ist, daß alle Bessermengen konvex sind. Es gibt eine allgemeinere Klasse von Funktionen, für die dies auch gilt; sie heißen „quasikonkav“. Definition:

$$f(x') \geq f(x'') \Rightarrow \underbrace{f(kx' + (1-k)x'')}_{\substack{kx' + (1-k)x'' \in B(x'')}} \geq f(x'')$$

$$x', x'' \in B(x'')$$

Wenn dies gilt ($\forall x', x'', 0 < k < 1$) so heißt die Funktion f quasikonkav.

Insbesondere:

$$f(x') = f(x'') \Rightarrow f(kx' + (1-k)x'') \geq f(x'')$$

(falls „ $>$ “ \leftrightarrow „streng“ quasikonkav)

Wenn eine quasikonkave Funktion auf einer konvexen Menge maximiert wird, sind die B.E.O. hinreichend für ein globales Maximum

Komparative Statik: Implizites Funktionentheorem

Häufig interessieren wir uns für die Lösungen $\{(x, r)\}$ einer impliziten Funktion

$$h(x, r) = 0 \quad \text{oder konstant}$$

$$\text{Bsp.: } x_1^\alpha x_2^\beta = \text{konst.}$$

Totales Differential:

$$\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial r} dr = 0$$

$$\underbrace{\frac{dx}{dr} = \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial h}{\partial r}}{\frac{\partial h}{\partial x}}}_{\text{Implizites Funktionentheorem}}$$

Implizites Funktionentheorem

Häufige Anwendung: Komparative Statik

$$\max_x f(x, r)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, r) = 0 \quad \text{B.E.O.}$$

Das ist unsere implizite Funktion

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r} dr = 0$$

$$\frac{dx}{dr} = \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}}{\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{<0, \text{ aus B.Z.O.}}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}\left(\frac{dx}{dr}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}\right)$$

signum=Vorzeichen

Optimierung bei Nebenbedingungen

Häufig ist die zulässige Menge nicht der gesamte \mathbb{R}^n , sondern die zulässigen Werte sind als die Lösungen einer Gleichung bestimmt.

Bsp.: Nutzenmaximierung bei Budgetbeschränkung
 $p \cdot x = M$

Allgemein:

$$\begin{array}{ll} \max_x & f(x) \\ \text{s.t.} & g(x) = 0 \\ \uparrow & \text{ („subject to“ =unter der Nebenbedingung)} \end{array}$$

In einem Optimum darf sich der Zielfunktionswert nicht ändern, wenn wir 2 beliebige x_i variieren lassen, z.B. x_1 und x_2

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (*)$$

Aus dem IFT angewandt auf $g(x) = 0$ wissen wir

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

für alle zulässigen Änderungen

$$\Rightarrow dx_1 = \Leftrightarrow \frac{\partial g / \partial x_2}{\partial g / \partial x_1} dx_2$$

für dx_1 eingesetzt in (*)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \underbrace{\left(\Leftrightarrow \frac{\partial g / \partial x_2}{\partial g / \partial x_1} dx_2 \right)}_{dx_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g / \partial x_2}{\partial g / \partial x_1} \\ \Rightarrow \frac{\partial f / \partial x_2}{\partial f / \partial x_1} &= \frac{\partial g / \partial x_2}{\partial g / \partial x_1} \end{aligned}$$

Ein beliebte Art, sich dies zu merken, ist die Lagrange-Funktion:

$$L = f(x) + \lambda g(x)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} (2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \Leftrightarrow \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ (1) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \Leftrightarrow \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (2) \\ (1) \end{array} \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}}$$

Um die Lösung (x_1, x_2, λ) eines konkreten Problems zu finden, benützt man

$$\frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2} = \frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2}$$

und

$$g(x) = 0 \quad (\text{die NB})$$

Optimierung bei Nebenbedingungen: Interpretation der Lagrange-Funktion

Bsp.: Nutzenmaximierung

$$\max u(x) \quad \text{s.t.} \quad M \Leftrightarrow p \cdot x = 0$$

Nehmen wir an, wir hätten die Möglichkeit, „Nutzeneinheiten“ nicht nur durch Güterkonsum (via $u(x)$) zu erwerben, sondern auch pro Geldeinheit λ Nutzeneinheiten direkt zu kaufen oder zu verkaufen (und von dem so eingenommenen Geld wieder Güter zu kaufen).

$$\max_x u(x) + \lambda[M \Leftrightarrow px]$$

$M \Leftrightarrow px$ = Rest des Geldes (d.h. das, was nicht für Güterkonsum ausgegeben wird)

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \Leftrightarrow \lambda p_1 = 0$$

In der Regel (für fast alle λ) wird man die Möglichkeit, Nutzen direkt zu kaufen / verkaufen, nutzen, und damit einem höheren Nutzen als beim Original-Nutzenmaximierungsproblem erreichen (warum?).

Trick: Wähle λ so, daß zu diesem Preis kein Nutzen direkt gehandelt wird, d.h. $M \Leftrightarrow px = 0$ gilt. Dieses λ muß die Funktion $u(x) + \lambda[M \Leftrightarrow px]$ bzgl. λ minimieren.

Wie ändert sich der erreichbare Nutzen, wenn M steigt?

$$\lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial M} \cdot \underbrace{[M \Leftrightarrow px]}_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial M} \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x_i} \right]_0 \Leftrightarrow \lambda p_i}_{\lambda p_i} = \lambda$$

λ ist „Grenznutzen des Geldes“.

Wertfunktionen:

$$\max_x f(x, r)$$

oder

$$\max_x f(x, r) \quad \text{s.t.} \quad g(x, r) = 0$$

$$\Rightarrow x(r) \quad (\text{„Lösung“})$$

Wenn wir $x(r)$ in die Zielfunktion einsetzen, so erhalten wir die Wertfunktion, d.h. den Wert der maximierten Zielfunktion in Abhängigkeit von den Parametern.

$$V(r) = f(x(r), r)$$

Beispiele:

Nutzenmaximierungsproblem: Indirekte Nutzenfunktion $v(p, m)$

Kostenminimierungsproblem: Kostenfunktion

Envelope-Theorem

Oft wollen wir wissen, wie sich die Änderung eines Parameters auf den Wert des Optimierungsproblems auswirkt.

Bei Maximierungsproblem ohne NB:

$$\begin{aligned} V(r) &= f(x(r), r) \\ \frac{\partial V}{\partial r_i} &= \frac{\partial f}{\partial r_i} + \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}}_0 \cdot \frac{\partial x_j}{\partial r_i} = \frac{\partial f}{\partial r_i} \end{aligned}$$

Eine Änderung von r_i hat 2 Effekte:

1. den direkten Effekt $\partial f / \partial r_i$
2. den indirekten Effekt : Eine Änderung von r_i verändert die Lösung $x(r)$, und dies wiederum verändert $f(x, r)$.

Das Envelope-Theorem besagt, daß man für kleine Änderungen des Parameters den 2.Effekt vernachlässigen kann; nur der direkte Effekt ist wichtig.

Envelope-Theorem, Max. mit NB:

$$\max_x f(x, r) \quad \text{s.t.} \quad g(x, r) = 0$$

Für das richtige λ ist die Lösung dieses Problems äquivalent mit der Maximierung der Lagrange-Funktion

$$L = f(x, r) + \lambda g(x, r)$$

Der Wert der Zielfunktion (im beschränkten Maximierungsproblem) ist gleich dem Wert der Lagrangefunktion. Also:

$$\begin{aligned} V(r) &= f(x(r), r) + \lambda g(x(r), r) \\ \frac{\partial V}{\partial r_i} &= \frac{\partial f}{\partial r_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial r_i} + \sum_{j=1}^n \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} \right]}_0 \cdot \frac{\partial x_j}{\partial r_i} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial r_i} \end{aligned}$$

Häufig ist es interessant, einen Parameter zu ändern, der nur in der NB steht. Bsp.:

$$\max u(x) \quad \text{s.t.} \quad \underbrace{M}_{r_{n+1}} \Leftrightarrow \underbrace{p}_{r_1, \dots, r_{n+1}} x = 0$$

$$L = u(x) + \lambda[M \Leftrightarrow px]$$

$$\frac{\partial g}{\partial M} = 1$$

$M \uparrow \Rightarrow$ der Nutzen steigt um $\lambda \cdot dM$, λ ist der „Grenznutzen des Einkommens“

$$\begin{aligned} \min \quad w \cdot x \quad \text{s.t.} \quad f(x) \Leftrightarrow y = 0 \\ \iff \max \quad \Leftrightarrow w \cdot x \end{aligned}$$

$$L = \Leftrightarrow wx + \lambda[f(x) \Leftrightarrow y]$$

$y \uparrow \Rightarrow$ Kosten wachsen um λ , $\lambda =$ Grenzkosten