

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1

a)

$$u'(x) = \frac{(1 - \rho) \cdot x^{-\rho}}{1 - \rho} = x^{-\rho}$$

$$u''(x) = -\rho \cdot x^{-\rho-1}$$

$$r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-\rho \cdot x^{-\rho-1}}{x^{-\rho}} = \frac{\rho}{x}$$

Maß der absoluten Risikoaversion: Unabhängig von linearen Transformationen von $u(x)$. Ein höheres AP-Maß bedeutet mehr Risikoaversion und höhere Risikoprämie.

Maß der relativen Risikoaversion:

$$r_R(x) = x \cdot r_A(x) = \rho = \textit{const}$$

Die Risikoprämie für eine Lotterie über einen festen Anteil des Einkommens bleibt für verschiedene Einkommensniveaus gleich hoch.

b) Stochastisches Endvermögen:

$$(1 - \alpha) \cdot W + \alpha \cdot (1 + r) \cdot W$$

Nutzen:

$$u((1 - \alpha) \cdot W + \alpha \cdot (1 + r) \cdot W)$$

Erwartungsnutzen:

$$\begin{aligned} E(u) &= E(u((1 - \alpha) \cdot W + \alpha \cdot (1 + r) \cdot W)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u((1 - \alpha) \cdot W + \alpha \cdot (1 + r) \cdot W) \cdot f(r) dr \end{aligned}$$

Mit der angegebenen Nutzenfunktion:

$$E(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{((1 - \alpha)W + \alpha(1 + r)W)^{1 - \rho}}{1 - \rho} \cdot f(r) dr$$

Erwartungsnutzenmaximierung:

$$\max_{\alpha} E(u(x))$$

Bedingungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial E(u(x))}{\partial \alpha} = 0 \quad \alpha \in (0, 1)$$

$$\frac{\partial E(u(x))}{\partial \alpha} < 0 \quad \alpha = 0$$

$$\frac{\partial E(u(x))}{\partial \alpha} > 0 \quad \alpha = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(u)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \int_{-\infty}^{\infty} \frac{((1-\alpha)W + \alpha(1+r)w)^{(1-\rho)}}{1-\rho} \cdot f(r) dr}{\partial \alpha} \\ &= w^{(1-\rho)} \cdot \frac{\partial \int_{-\infty}^{\infty} \frac{((1-\alpha) + \alpha(1+r))^{(1-\rho)}}{1-\rho} f(r) dr}{\partial \alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ableitung unabhängig von W .

Interpretation: Individuum investiert unabhängig von W immer den gleichen Anteil von W in das riskante Wertpapier. Nur der investierte Betrag steigt mit W .

c) $E(r) = 0$.

Beide Anlagen sind im Erwartungswert gleich gut.

Risikoaversion: Schwankender Zins ist schlechter als sicherer Ertrag von 0.

Keine Investition in unsichere Anlagemöglichkeit: $\alpha = 0$.

Aufgabenblatt 6

Nachtrag zu Aufgabe 1

$$\max_{\alpha} \int_{-1}^{\infty} \frac{(1 + \alpha \cdot r)^{1-\rho}}{1 - \rho} \cdot f(r) dr$$

Bedingung 1. Ordnung:

$$\int_{-1}^{\infty} r \cdot (1 + \alpha \cdot r)^{-\rho} f(r) \cdot dr = 0$$

2. Ableitung:

$$\int_{-1}^{\infty} \underbrace{-\rho r^2}_{+} \cdot \underbrace{(1 + \alpha \cdot r)^{-\rho-1}}_{+} \cdot \underbrace{f(r)}_{+} dr < 0$$

Häufig ist nicht jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ zulässig, sondern nur $0 \leq \alpha \leq 1$.

Eine negative 2. Ableitung bedeutet, daß die 1. Ableitung eine fallende Funktion von α ist. Folgende 3 Fälle können eintreten:

- $\alpha^* = 1 \Rightarrow f'(\alpha^*) \geq 0$
- $\alpha^* = 0 \Rightarrow f'(\alpha^*) \leq 0$
- $0 < \alpha^* < 1 \rightarrow f'(\alpha^*) = 0$

In beiden Fällen mit strikt positiver Lösung ($\alpha^* > 0$) ist die erste Ableitung an der Stel-

Ist $\alpha = 0$ positiv:

$$\int_{-1}^{\infty} r \cdot (1 + 0r)^{-\rho} f(r) dr = \int_{-1}^{\infty} r \cdot 1 f(r) dr = E(r)$$

Ist der erwartete Zins positiv, so wird das Individuum Wertpapiere kaufen ($\alpha > 0$). Ist der erwartete Zins negativ, so befinden wir uns im zweiten der drei Fälle und das Individuum kauft keine Wertpapiere.

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 2

| | $x_1 = 100$ | $x_2 = 200$ |
|-----------|-------------|-------------|
| $a_L = 0$ | 0,8 | 0,2 |
| $a_H = 3$ | 0,2 | 0,8 |

a)

Principal kann a beobachten

Billigster Vertrag, um a_H durchzusetzen:

$$\min_{w_1, w_2} \quad 0,2 \cdot w_1 + 0,8 \cdot w_2$$

$$u.d.N. \quad 0,2\sqrt{w_1} + 0,8\sqrt{w_2} - 3 \geq 4$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 0,2 + 0,2\lambda \frac{1}{2\sqrt{w_1}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = 0,8 + 0,8\lambda \frac{1}{2\sqrt{w_2}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{w_1} = \sqrt{w_2}$$

$$\Rightarrow w_1 = w_2$$

$$\Rightarrow 0,2\sqrt{w_1} + 0,8\sqrt{w_2} = 7 \Rightarrow \sqrt{w_1} = 7 \Rightarrow w_1 = w_2 = 49$$

(Gilt nur, wenn der Agent tatsächlich a_H unternimmt, was passiert bei a_L ?)

Erwarteter Gewinn bei diesem Vertrag:

$$V = Ex - w = 0,2 \cdot 100 + 0,8 \cdot 200 - 49 = 131$$

analog: billigster Vertrag, der a_L durchsetzt
hat auch Voldeckung

$$\sqrt{w} - 0 = 4 \quad \Rightarrow \quad w = 16$$

Erwarteter Gewinn bei diesem Vertrag:

$$0,8 \cdot 100 + 0,2 \cdot 200 - 16 = 104$$

b)

Der Vertrag aus a) bleibt weiterhin anreizkompatibel, denn $\sqrt{16} - 0 \geq \sqrt{16} - 3$

c)

Anstrengungsniveau ist nicht beobachtbar \Rightarrow

Anreiz NB:

$$\underbrace{0,8\sqrt{w_2} + 0,2\sqrt{w_1} - 3}_{E(U) \text{ bei } a_H} \geq \underbrace{0,2\sqrt{w_2} + 0,8\sqrt{w_1} - 0}_{E(U) \text{ bei } a_L}$$

Teilnahme NB:

$$0,8\sqrt{w_2} + 0,2\sqrt{w_1} - 3 \geq 4$$

Problem des Principals:

$$\max_{w_1, w_2} 0,2 \cdot 100 + 0,8 \cdot 200 - 0,2 \cdot w_1 - 0,8 \cdot w_2$$

unter den beiden obigen Nebenbedingungen.

Behauptung: Beide Nebenbedingungen müssen binden.

Widerspruchsbeweis:

- keine bindet ? $\Rightarrow w_1 = w_2$ optimal \rightarrow beide NB verletzt

- nur Teilnahme NB bindet, Anreiz NB nicht?

\Rightarrow Problem wie in a, $w_1 = w_2 = 49$ optimal, jedoch

$$0,8\sqrt{49} + 0,2\sqrt{49} - 3 < 0,2\sqrt{49} + 0,8\sqrt{49} - 0$$

Die Anreiz NB wäre damit verletzt

- nur Anreiz NB bindet, Teilnahme NB bindet nicht ? Senkung von w_1 (um geringen Betrag ε): \Rightarrow Anreiz NB bleibt erfüllt, Teilnahme NB wird bei ε klein genug nicht verletzt \Rightarrow Zielfunktionswert steigt (Widerspruch zur Optimalität)

$$\begin{aligned}
L &= 180 - 0,2w_1 - 0,8w_2 \\
&+ \lambda[0,8\sqrt{w_2} + 0,2\sqrt{w_1} - 7] \\
&+ \mu[0,6\sqrt{w_2} - 0,6\sqrt{w_1} - 3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial w_1} &= -0,2 + 0,2 \cdot \lambda \frac{1}{2\sqrt{w_1}} - 0,6 \cdot \mu \frac{1}{2\sqrt{w_1}} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial w_2} &= -0,8 + 0,8\lambda \frac{1}{2\sqrt{w_2}} + 0,6\mu \frac{1}{2\sqrt{w_2}} = 0
\end{aligned}$$

$$0,2\sqrt{w_1} + 0,8\sqrt{w_2} = 7$$

$$-0,6\sqrt{w_1} + 0,6\sqrt{w_2} = 3$$

Dieses in $\sqrt{w_1}$ und $\sqrt{w_2}$ lineare GS läßt sich lösen:

$$w_2 = 64 \qquad w_1 = 9$$

d) Gewinn beim billigsten Vertrag, der a_L durchsetzt: 104

Gewinn beim billigsten Vertrag, der a_H durchsetzt:

$$0,8 \cdot 200 + 0,2 \cdot 100 - 0,8 \cdot 64 - 0,2 \cdot 9 = 127$$

Der Wohlfahrtsverlust ist daher 4 (Agency-Kosten).

Soviel ist der Erwartungsgewinn des Principals gesunken. Der Agent steht genauso gut wie vorher.

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 4

a) Risikoneutralität beider Marktseiten: Erwartungswerte entscheiden.

Erwarteter Reservationspreis Verkäufer:

$$E(p) = 0,5 \cdot 5000 + 0,5 \cdot 0 = 2500$$

Erwartete Zahlungsbereitschaft Käufer:

$$E(p) = 0,5 \cdot 6000 + 0,5 \cdot 1000 = 3000$$

Siehe Grafik für Gleichgewicht.

Die kürzere Marktseite (Verkäufer) dominiert:

$p^* = 3500$ und alle Autos werden verkauft.

Das Ergebnis ist effizient, weil alle erreichbaren Überschüsse erzielt werden, dadurch, daß die Autos an die WS mit der höheren ZB gegeben werden.

b) Ein Käufer ist bereit 3500 DM für ein Auto zu bezahlen.

Zu diesem Preis werden aber keine guten Autos angeboten, weil der Reservationspreis der Verkäufer bei 5000 DM liegt.

Nur schlechte Autos werden verkauft. Der Gleichgewichtspreis liegt bei 1000 DM.

Das GGW ist NICHT effizient, da die aus dem Verkauf guter Autos erreichbaren Überschüsse nicht realisiert werden.

⇒: Marktversagen.

c)

G = "Auto ist gut"

T = "Auto wird vom Test als gut erkannt"

mit

$$P(T|G) = \alpha$$

$$P(T|\bar{G}) = \beta$$

und der Bayes'schen Regel erhalten wir:

$$P(G|T) = \frac{P(G) \cdot P(T|G)}{P(T)}$$

wobei:

$$P(T) = P(T|G) \cdot P(G) + P(T|\bar{G}) \cdot P(\bar{G})$$

(Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

$$P(G|T) = \frac{0,5 \cdot \alpha}{0,5 \cdot \alpha + 0,5 \cdot \beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$P(G|\bar{T}) = \frac{P(G) \cdot P(\bar{T}|G)}{P(\bar{T})} = \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha) + (1 - \beta)}$$

Aufgrund des Testergebnisses gibt es für den Verkäufer 2 Arten von Autos:

- Autos die den Test bestanden haben.
- Autos, die den Test nicht bestanden haben.

Für ein Auto mit positivem Testergebnis verlangt der Verkäufer:

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot 5000DM > 2500DM$$

Für ein Auto mit negativem Testergebnis verlangt er:

$$\frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha) + (1 - \beta)} \cdot 5000DM < 2500DM$$

Sei nun $\beta = 3/28$:

Damit alle Autos angeboten werden, muß gelten:

$$p = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot 5000DM$$

und:

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot 5000 \leq 3500$$

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \leq 0,7$$

$$0,3\alpha \leq 0,7\beta$$

$$\alpha \leq 0,25$$

Effizientes Ergebnis. Alle Autos verkauft. Für $\alpha > 0,25$ werden gute Autos nicht verkauft. Verkäufer verlangen mehr als 3500 DM (Ineffizient).

Interpretation: Wenn α groß ist, wissen Verkäufer durch den Test zuviel über die Qualität des Au-

tos. Information wird zu stark asymmetrisch.

Allgemein: $\alpha(\beta) = 7/3 \cdot \beta$.

Je öfter ein schlechtes Auto für gut befunden wird, desto öfter darf auch ein gutes Auto für gut befunden werden.

d) In dieser Situation haben beiden Seiten neue Informationen durch den Test.

Für ein Auto mit positivem Testergebnis zahlt der Käufer:

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot 6000DM + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot 1000DM = 4333DM$$

Ohne Gutachten (entspricht negativem Ergebnis des Tests) zahlt er:

$$\frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha) + (1 - \beta)} \cdot 6000 DM + \frac{1 - \beta}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \cdot 1000 DM =$$

Verkäufer verlangt 3333 (gutes Testergebnis) und 2000 (negatives Ergebnis).

Gleichgewichtspreise durch Käufer bestimmt: 4333 (guter Test) und 3000 (negativer Test).

Alle Autos verkauft: Effizient.

Alle positiven Ergebnisse durch Gutachten bestätigt, da höherer Preis erzielt werden kann. Ohne Gutachten: Nur Preis von 2000 erzielbar.