Ludwig-Maximilians-Universität München
Seminar für Versicherungswissenschaft
Prof. Ray Rees / Florian Englmaier
Economics of Information and Uncertainty SS 2004

Diplomprüfung für Volkswirte

Exam

Economics of Information and Uncertainty

14/07/2004

You have to answer 4 of the 5 problems. You will have 120 minutes to work through these problems. Next to the problems you can see how many points can *approximately* be earned with that problem. Altogether you can earn up to **120 points**.

Note that you have to assign this course in the field “Fach” to either “VWL”, “Strategische Entscheidungen”, or “VWL der Versicherungen”.

You have to note your **name** and your **Matrikelnummer** on each sheet.

You may use a non-programmable pocket calculator.

Good Luck!

Ludwig-Maximilians-Universität München
Seminar für Versicherungswissenschaft
Prof. Ray Rees / Florian Englmaier
Economics of Information and Uncertainty SS 2004

Diplomprüfung für Volkswirte

Klausur im Fach

Economics of Information and Uncertainty

am 14.07.2004

4 der 5 Aufgaben sind zu bearbeiten. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Hinter den Aufgaben stehen *ungefähre* Punktangaben. Insgesamt sind **120 Punkte** erreichbar.

Beachten Sie außerdem, dass Sie Ihre Prüfungsleistung im Feld "Fach" einem der Bereiche "VWL", "Strategische Entscheidungen" oder "VWL der Versicherungen" verbindlich zuordnen müssen.

Vermerken Sie auf jedem Blatt zumindest Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**.

Als Hilfsmittel ist ein nicht-programmierbarer Taschenrechner zugelassen.

Viel Erfolg!

1 von–Neumann–Morgenstern utility function (30 Points)

Consider the following utility functions:

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x \\ v(x) &= \ln x + 4 \\ w(x) &= \ln(\frac{1}{2}x) + 4 \\ z(x) &= 2\ln(x+4) \end{aligned}$$

a) Calculate the Pratt–Arrow–coefficients of absolute risk aversion for these utility functions. **(10)**

b) Which of these these utility functions are equivalent? **(10)**

For a specific random variable X_0 we find that Udo's risk premium is smaller than Vera's risk premium.

c) Does that imply the following statements (or one of those)? $u(x)$ captures Udo's and $v(x)$ captures Vera's preferences.

1. For all x it holds that $-\frac{u''(x)}{u'(x)} < -\frac{v''(x)}{v'(x)}$.
2. $-\frac{u''(x)}{u'(x)} > -\frac{v''(x)}{v'(x)}$ cannot hold for all x.

Explain your answers. **(10)**

2 Lotteries (30 Points)

Consider the following lottery: With probability p you win \$1000 and with $1-p$ you loose \$1000 where $1/2 < p < 1$ holds. Thus the bet is actuarially advantageous. Assume you are a risk averse von–Neumann–Morgenstern expected utility maximizer with initial wealth w_0 who does not accept this bet.

a) Now assume you could also take only a fraction of this bet. The bet then reads: With probability p you win \$1000$\cdot k$ and with $1-p$ you loose \$1000 $\cdot$ k. You may choose any $k > 0$. Show that there exists a strictly positive k, such that you are willing to accept the bet. (Tip: Start with setting up the problem in expected utility terms and ask yourself what has to hold for a positive k to exist such that the above statement is true.) **(20)**

b) Now suppose you were offered N independent repetitions of the initial bet ($k = 1$). Briefly discuss the following statement:

> For N large enough the law of large numbers guarantees positive expected profits. But this says risk aversion should only matter when we consider a single lottery. If we think of many independent repetitions of the same lottery one should only use the long run average (expected value) for orientation. **(10)**

3 Insurance Demand (30 Points)

An agent with a DARA utility function and initial wealth w can insure against a loss L which occurs with probability π. The insurance charges per unit cover the premium rate $p = \lambda\pi$ with $\lambda > 1$.

a) Outline the situation in a 2–states–diagram. How much insurance cover will the agent demand? Explain your answer in the diagram. **(4)**

b) Derive your result formally. **(6)**

c) What happens if the insurer increases the factor λ? Explain your answer in the diagram. **(6)**

d) What happens when the agent's initial wealth increases? Explain your answer in the diagram. **(4)**

e) How does your answer to c) and d) change if $\lambda = 1$? **(4)**

f) How does your answer to c) and d) change if the utility function displays CARA or IARA respectively? **(6)**

4 State Dependent Income; State Dependent Preferences (30 Points)

An agent with utility function $u(x)$ with $u' > 0, u'' < 0$ faces two possible states of the world A and B. State A occurs with probability p and state B with the remaining probability $(1 - p)$. The agent's initial endowment in the respective states is w_A and w_B where $w_A < w_B$ holds.

Now there is a chance to buy γ units of income in state A. For an additional unit of income in state A the agent has to give up π units in state B.

a) Derive the "price" π^* for which the agent would buy just enough income in state A as to equalize income in the two respective states. **(10)**

b) Can it be that the agent for certain prices π would offer income in A for sale? Characterize these prices and interpret this situation. **(10)**

Now assume the agent has a state dependent utility function. I.e. his preferences in state A are captured by the utility function u_A and in state B by the utility function u_B. Assume $u'_A > u'_B \ \forall\ x$ holds.

c) Will the agent end up on the certainty line after he finished trading even when $\pi = \frac{p}{1-p}$ holds? **(10)**

5 Firm under Cost Uncertainty (30 Points)

An entrepreneur has a logarithmic utility function. Her initial wealth is 20. Production costs per unit are either $\underline{c} = 1$ or $\bar{c} = 4$. These costs are realized with probability 1/2 respectively. The market price for the final good is p.

a) Set up the entrepreneur's problem and calculate the optimal production m^* as a function of prices.
Intermediate result: $m^* = 20(p - \hat{c})/[(p-1)(4-p)]$, where $\hat{c}$ are expected unit costs. **(8)**

b) Vary the parameter p and interpret your result. What is the optimal production for p=3? **(4)**

c) Consider the case where fixed costs occur during production. How can that be captured in the above derived equation? How does it affect the above derived solution? Why? **(4)**

d) Now fixed costs are 0 again and the price is $p = 3$. The entrepreneur hires a consultancy company to introduce "just-in-time" production. The marginal costs of production in the good state go down from 1 to 0 whereas in the bad state they rise to $4,5$. Calculate the change in optimal production compared to the old technology. Set up an equation that implicitly defines the entrepreneur's willingness to pay for the new technology. **(6)**

e) The entrepreneur now has access to a futures–market where she can sell her products at a price of p^f. What does that change? Write down her problem in this case. You do not have to solve the problem but only argue what is going to happen dependent on the price on the futures–market. **(8)**

1 von–Neumann–Morgenstern Nutzenfunktionen (30 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Nutzenfunktionen:

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x \\ v(x) &= \ln x + 4 \\ w(x) &= \ln(\frac{1}{2}x) + 4 \\ z(x) &= 2\ln(x+4) \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Pratt–Arrow–Koeffizienten der absoluten Risikoaversion dieser Nutzenfunktionen. **(10)**

b) Welche dieser Nutzenfunktionen sind äquivalent? **(10)**

Für eine bestimmte Zufallsvariable X_0 beobachten wir, dass die Risikoprämie von Udo kleiner ist als die von Vera.

c) Folgen daraus die beiden folgenden Behauptungen (oder evtl. nur eine)? $u(x)$ beschreibt Udos und $v(X)$ beschreibt Veras Präferenzen.

1. Für alle x gilt $-\frac{u''(x)}{u'(x)} < -\frac{v''(x)}{v'(x)}$.
2. $-\frac{u''(x)}{u'(x)} > -\frac{v''(x)}{v'(x)}$ kann nicht für alle x gelten.

Begründen Sie Ihre Aussage jeweils. **(10)**

2 Lotterien (30 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Lotterie: Mit Wahrscheinlichkeit p gewinnen Sie \$1000 und mit $1 - p$ verlieren Sie \$1000. Hierbei gelte $1/2 < p < 1$, die Wette ist also aktuarisch vorteilhaft. Nehmen Sie an, Sie seien ein risikoaverser von–Neumann–Morgenstern Erwartungsnutzenmaximierer mit Anfangsvermögen w_0, der diese Wette ablehnt.

a) Nehmen Sie nun an, sie könnetn auch nur einen Bruchteil dieser Lotterie annehmen. Die Wette lautet dann: Mit Wahrscheinlichkeit p gewinnen Sie $\$1000 \cdot k$ und mit $1-p$ verlieren Sie $\$1000 \cdot k$. Sie können jedes $k > 0$ wählen. Zeigen Sie, dass ein strikt positives k existiert, so dass Sie die Wette annehmen werden. (Tipp: Stellen Sie zunächst das Erwartungsnutzenkalkül auf und überlegen Sie danach was gelten muss, damit ein positives k existiert so dass obige Aussage wahr ist) **(20)**

b) Nehmen Sie nun an, dass Ihnen N unabhängige Wiederholungen der ursprünglichen Wette ($k = 1$) angeboten werden. Nehmen Sie knapp zur folgenden Aussage Stellung:

> Wenn N groß genug ist, impliziert das Gesetz der großen Zahl, dass man in jedem Fall positive Gewinne erzielen wird. Das bedeutet, dass Risikoaversion sinnvollerweise

nur bei der Betrachtung einer einzelnen Lotterie eine Rolle spielen sollte. Wenn wir an viele unabhängige Wiederholungen derselben Lotterie denken, sollte man sich allerdings nur am langfristigen Durchschnitt (Erwartungswert) orientieren. **(10)**

3 Versicherungsnachfrage (30 Punkte)

Ein Individuum mit einer DARA Nutzenfunktion und einem Anfangsvermögen w kann sich bei einer Versicherung gegen einen Schaden L versichern, der mit Wahrscheinlichkeit π eintritt. Die Versicherung verlangt je nachgefragter Einheit Deckung die Prämienrate $p = \lambda\pi$ mit $\lambda > 1$.

a) Skizzieren Sie die Situation in einem 2–Zustände–Diagramm. Wieviel Versicherung wird das Individuum nachfragen? (Argumentieren Sie im Diagramm!)**(4)**

b) Leiten Sie Ihr Ergebnis auch formal ab.**(6)**

c) Was passiert, wenn die Versicherung den Faktor λ erhöht? Argumentieren Sie anhand einer Grafik! **(6)**

d) Was passiert, wenn sich das Anfangsvermögen des Individuums erhöht? Argumentieren Sie anhand einer Grafik! **(4)**

e) Wie ändert sich Ihre Antwort auf c) und d) wenn $\lambda = 1$ ist? **(4)**

f) Wie ändert sich Ihre Antwort auf c) und d) wenn die Nutzenfunktion CARA bzw. IARA ist? **(6)**

4 Zustandsabhängiges Einkommen; Zustandsabhängige Präferenzen (30 Punkte)

Ein Individuum mit der Nutzenfunktion $u(x)$ mit $u' > 0, u'' < 0$ sehe sich zwei möglichen Zuständen der Welt, A und B, gegenüber. Zustand A tritt mit Wahrscheinlichkeit p und Zustand B mit der Gegenwahrscheinlichkeit $(1 - p)$ ein. Die Anfangsausstattung des Individuums in den beiden Zuständen der Welt beträgt w_A bzw. w_B mit $w_A < w_B$.

Es besteht nun die Möglichkeit, γ Einheiten Einkommen im Zustand A zu kaufen. Für eine Einheit zusätzliches Einkommen im Zustand A muss das Individuum π Einheiten im Zustand B aufgeben.

a) Leiten Sie den "Preis" π^* her, bei dem das Individuum genau so viel Einkommen im Zustand A kaufen wird, dass das Einkommen in beiden Zuständen der Welt ausgeglichen ist!**(10)**

b) Ist es auch möglich, dass das Individuum für bestimmte Preise π Einkommen im Zustand A zum Verkauf anbietet? Charakterisieren Sie diese Preise. Interpretieren Sie diese Situation.**(10)**

Nehmen Sie nun an, dass das Individuum eine zustandsabhängige Nutzenfunktion hat. Das bedeutet, dass die Präferenzen im Zustand A durch die Nutzenfunktion u_A und im Zustand B durch die Nutzenfunktion u_B beschrieben werden. Nehmen Sie an, dass gilt: $u'_A > u'_B \; \forall \; x$.

c) Wird sich das Individuum nun auf seine Sicherheitsgerade tauschen, auch wenn gilt $\pi = \frac{p}{1-p}$? **(10)**

5 Unternehmen bei Kostenunsicherheit (30 Punkte)

Eine Unternehmerin habe eine logarithmische Nutzenfunktion. Ihr Vermögen sei 20. Die Kosten der Produktion pro Einheit seien entweder $\underline{c} = 1$ oder $\overline{c} = 4$, jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Der Preis auf dem Markt sei p.

a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem der Unternehmerin und bestimmen Sie die optimale Produktionsmenge m^* als Funktion des Preises.
Zwischenergebnis: $m^* = 20(p - \hat{c})/[(p-1)(4-p)]$, wobei $\hat{c}$ die erwarteten Stückkosten sind. **(8)**

b) Interpretieren Sie ihr Ergebnis, wobei sie den Parameter p variieren lassen. Wie hoch ist die optimale Produktionsmenge bei p=3? **(4)**

c) Betrachten Sie nun den Fall, dass bei der Produktion auch Fixkosten entstehen. Wie kann man diese in obiger Gleichung für die optimale Produktionsmenge berücksichtigen? Was ändert sich am Ergebnis? Warum? **(4)**

d) Die Fixkosten seien wieder 0, der Preis $p = 3$. Die Unternehmerin engagiert eine Beratungsfirma, die "just-in-time" Produktion einführt. Die Grenzkosten im guten Zustand der Welt fallen von 1 auf 0, allerdings steigen sie im schlechten Zustand der Welt auf $4,5$. Berechnen Sie die Änderung in der optimalen Produktionsmenge im Vergleich zur alten Technologie. Stellen Sie eine Gleichung auf, die implizit die Zahlungsbereitschaft der Unternehmerin für diese Technologie definiert. **(6)**

e) Die Unternehmerin habe die Möglichkeit, ihr Produkt an einem Futures-Markt zum Preis von p^f zu verkaufen. Was ändert sich in diesem Fall? Stellen Sie das Kalkül der Unternehmerin indiesem Fall auf. Sie müssen die Lösung nicht ausrechnen sondern nur erläutern was – abhängig vom Preis auf dem Futures-Markt – passieren wird. **(8)**