Entscheidungen bei Ungewißheit

Klausur am 2. 8. 1996

Bearbeiten Sie 2 der folgenden 3 Aufgaben; damit sind insgesamt maximal 40 Punkte erreichbar (1 Punkt=3 Minuten); die Punktzahl der Unteraufgaben ist in Klammern angegeben. Bei der Bearbeitung dürfen Sie einen Taschenrechner benutzen.

1. **Risikoaversion:**
   Das Theorem von Pratt zeigt die Äquivalenz folgender 3 Aussagen:

$$A_u(y) > A_v(y) \ \forall y \tag{1}$$

$$u(y) = h(v(y)) \text{ mit } h() \text{ strikt konkav} \tag{2}$$

$$r_u(y, Z) > r_v(y, Z) \text{ für alle Zufallsvariablen } Z \tag{3}$$

   wobei $r()$ die Risikoprämie ist.

   (a) Zeigen Sie, daß aus (1) (2) folgt. (5P)

   (b) Definieren Sie die Risikoprämie verbal und formal. (2P)

   (c) Betrachten Sie folgende Elemente aus dem Beweis, daß aus (2)(3) folgt:

$$r_u - r_v = v^{-1}(Ev(y+Z)) - u^{-1}(Eu(y+Z)) \tag{4}$$

$$= u^{-1}(u(v^{-1}(Ev(y+Z)))) - u^{-1}(Eu(y+Z)) \tag{5}$$

$$r_u > r_v \iff u(v^{-1}(Ev(y+Z))) > Eu(y+Z) \tag{6}$$

   Diese Ungleichung ist erfüllt, da

$$u(v^{-1}(Ev(y+Z))) > Eu(v^{-1}(v(y+Z))) = Eu(y+Z) \tag{7}$$

   Im Folgenden sind Begründungen für die Umformungen gefragt:
   Woraus folgt Gleichung (4)? (1P)
   Wieso folgt aus Gleichung (5) die Beziehung (6)? (1P)
   Wieso gilt die Ungleichung in (7) (2P).

   (d) Betrachten Sie nun die Nutzenfunktionen

$$u(x) = x - \frac{1}{1000}x^2$$

$$v(x) = 1 - e^{-0{,}002x}$$

   In welchem Bereich ist $u(x)$ eine sinnvolle Nutzenfunktion? (1P)
   Berechnen Sie jeweils die absolute Risikoaversion $A_u(x)$ und $A_v(x)$. (2P)
   Wie ändern sich A_u und A_v mit dem Einkommen? (2P)

(e) Die Individuen U und V (mit den Erwartungsnutzenfunktionen aus der letzten Teilaufgabe) haben jeweils ein stochastisches Vermögen $100+Z$, wobei die Zufallsvariable Z mit 40% Wahrscheinlichkeit den Wert -10, mit 40% Wahrsch. den Wert +5 und mit 20% Wahrsch. den Wert +10 an. Begründen Sie, warum die Risikoprämie von U größer ist als die von V. (Hinweis: Denken Sie erst nach, bevor Sie zu rechnen anfangen.) (4P)

2. **Stochastische Dominanz und Mean Preserving Spread:**

   (a) Betrachten Sie folgende Aussage A: ,,Jedes risikoaverse Individuum zieht von 2 Verteilungen mit dem gleichen Erwartungswert immer die vor, die die kleinere Varianz hat". Formulieren Sie $\overline{A}$, das Gegenteil (im mathematisch–logischen Sinne) von Aussage A. Ist die Aussage $\overline{A}$ wahr oder falsch? (ohne Begründung) (3P)

   (b) Geben Sie die Definition eines Mean Preserving Spreads (MPS) an. (2P)

   (c) Die Zufallsvariable Z_2 sei ein MPS der Zufallsvariable Z_1. Zeigen Sie, daß folgende Ungleichung gilt:

$$Eu(y + Z_1) > Eu(y + Z_2)$$

   wobei $u(\cdot)$ eine strikt konkave Funktion ist.(5P)

   (d) Betrachten Sie nun folgendes Modell der Portfoliowahl: Ein Individuum mit Erwartungsnutzenfunktion $u()$ hat ein Anfangsvermögen W_0, das es teilweise in Staatsanleihen (mit dem sicheren Zins r) und teilweise in Aktien (mit der unsicheren Verzinsung Q) anlegen kann. Es gelte $EQ > r$. Das Problem besteht darin, den optimalen Anlagebetrag in Aktien, $x^* \geq 0$, zu wählen:

$$\max_x Eu((W_0 - x)(1 + r) + x(1 + Q))$$

   Zeigen Sie, daß $x^* > 0$ ist. (2P).
   Definieren Sie den ,,sicherheitsäquivalenten Zins" r_u dieses Investors durch die Gleichung

$$u(W_0(1 + r_u)) = Eu((W_0 - x)(1 + r) + x(1 + Q))$$

   Formulieren Sie verbal, was der sicherheitsäquivalente Zins ist. (1P)
   Warum gilt $r_u > r$? (2P)
   Zeigen Sie, daß ein MPS von Q den sicherheitsäquivalenten Zins senkt.(5P)

3. **Allgemeines Gleichgewicht bei Unsicherheit:**

(a) Beschreiben Sie *kurz*, wie man die allgemeine Gleichgewichtstheorie bei Sicherheit auf den Fall mit Unsicherheit übertragen kann. Welches Problem ergibt sich bei diesem Vorgehen ? (2P)

(b) Was sind Arrow–Wertpapiere und Zustandspreise? (1P)

(c) An der Börse von Inkomplitistan werden 2 Aktien, aber keine Arrow–Wertpapiere gehandelt; beide haben zur Zeit einen Kurs von 100. In der nächsten Periode können 2 Zustände der Welt eintreten. Im Zustand 1 ist der Wert von Aktie A 120 und von Aktie B 150, im Zustand 2 jeweils 90 (A) bzw. 80 (B).

Konstruieren Sie ein Portfolio, das äquivalent ist zu einem Portfolio mit 100 Arrow–Wertpapieren auf Zustand 1. Was ist der implizite Preis eines Arrow–Wertpapiers auf den Zustand 1?; warum erscheint er völlig unabhängig von der Eintrittswahrscheinlichkeit des Zustands zu sein?. (7P)

(d) Im Nachbarland Komplitistan sind die Märkte noch weiter entwickelt, Arrow–Wertpapiere sind für beide Zustände der Welt (mit Eintrittswahrscheinlichkeiten π_1 bzw. π_2) verfügbar, wobei die Gesamtausstattung des Landes im Zustand 1, w_1 größer ist als im Zustand 2 (w_2). Alle $i = 1, .., I$ Einwohner haben eine Nutzenfunktion der Gestalt $u(x) = \ln x$ und (möglicherweise unterschiedliche) Anfangsausstattungen im Zustand s von w_s^i.

Berechnen Sie die Gleichgewichtspreise p_1 und p_2 für Arrow–Wertpapiere, wobei $p_1 + p_2$ auf 1 normalisiert sei. (8P.)

Stimmen Sie der Komplitistanischen Arbeiter Partei zu, die in ihrer Wahlkampfplattform folgendes sagt: ,,Eine Veränderung der völlig unakzeptablen Verteilung der Ausstattungen in Komplitistan könnte auch erreichen, daß p_2 auf ein sozial akzeptableres Niveau fallen würde, eventuell sogar unter π_2." (2P)