Klausur im Fach Entscheidungen bei Ungewißheit am 21. Juli 2000

Bearbeiten Sie 2 der 3 folgenden Abschnitte, nach ihrer Wahl. Ihre Note basiert auf dem Verhältnis zwischen den von Ihnen erzielten Punkten und den mit diesen Aufgaben erzielbaren Punkten. Die erzielbaren Punkte sind (ungefähr, Änderungen vorbehalten) in Klammern hinter den Aufgaben vermerkt.

Erlaubtes Hilfsmittel: Taschenrechner. Viel Spaß!

Arrow–Wertpapiere und Gleichgewicht bei Unsicherheit (20)

1. Was ist ein Arrow-Wertpapier? Worin liegt der Nutzen dieses Konzepts für die Wirtschaftstheorie? (2,5)

2. Leiten Sie die Borch Bedingung ab, die bei einer Pareto-optimalen Aufteilung des Risikos gilt. (3)

3. Arrow-Wertpapiermärkte (AWM) existieren in der Regel in der realen Welt nicht. In welchem Fall kann ein Wertpapiermarkt einen AWM vollständig replizieren? (2)

4. Betrachten sie folgenden Wertpapiermarkt, wo 2 Aktien (A1 und A2) gehandelt werden, welche in den 2 möglichen Zuständen der Welt (Z1 und Z2) folgende Auszahlungen haben:

	Z1	Z2
A1	10	3
A2	5	1

   (a) Konstruieren Sie ein Portfolio, das einem AW auf den Zustand 1 entspricht. (2)

   (b) Nehmen Sie an, die Preise der Aktien seien $P_1 = 5$ und $P_2 = 2$; welchen Preis hätte ein Arrow-Wertpapier auf Zustand 1. (1,5)

   (c) Was kostet eine **Put-Option** auf Aktie 2 zum Basispreis 3, d.h. eine Option, die dem Inhaber das Recht gibt, Aktie 2 nach Realisierung des Zustands der Welt zu einem Preis von 3 zu verkaufen? (3)

   (d) Nehmen sie nunmehr an, daß die Agenten auch Geld sparen oder Kredit aufnehmen können, jeweils zu einem Zinssatz von 0%.[1] Stellen Sie einen risikofreien Weg, Geld zu verdienen, dar, wenn die Preise weiterhin $P_1 = 5$ und $P_2 = 2$ wären. (3)

   (e) Nehmen sie immer noch an, daß die Agenten auch Geld sparen oder Kredit aufnehmen können, jeweils zu einem Zinssatz von 0%. Welche Preise P_1 und P_2, die im Verhältnis 5:2 stehen, wären gleichgewichtige Preise? (3)

[1] Wenn man also 1000 DM spart, bekommt man in der nächsten Periode unabhängig vom Zustand der Welt wieder 1000 DM heraus.

Arrow–Pratt–Maß der Risikoaversion (17)

Sei X eine Zufallsvariable mit $EX = 0$. Die kompensierende Risikoprämie k ist definiert durch die folgende Gleichung:

$$u(y) = Eu(y + k + X)$$

1. Interpretieren Sie die kompensierende Risikoprämie. Was ist der Unterschied zur (normalen) Risikoprämie aus der Vorlesung? (2)

2. Nehmen Sie an, daß die Zufallsvariable X "klein" ist und berechnen Sie, wie groß die kompensierende Risikoprämie ungefähr ist. (3)

   Für die kompensierende Risikoprämie gelten die gleichen Äquivalenzbeziehungen, die wir in der Vorlesung für die Risikoprämie kennengelernt haben, d.h. die folgenden 3 Aussagen sind äquivalent:
   (A) $A_u(x) = -\frac{u''}{u'} < A_v(x) = -\frac{v''}{v'}$ für alle x.
   (B) $v(x) = g(u(x))$, wobei $g(\cdot)$ konkav ist.
   (C) Für alle Zufallsvariablen ist die kompensierende Risikoprämie des Individuums mit der Nutzenfunktion u kleiner als die des Individuums mit der Nutzenfunktion v.

3. Beweisen Sie die Äquivalenz von (A) und (B). (3)

4. Aus (B) folgt (C); man beweist dies über die folgende Ungleichungskette

$$\begin{aligned} g(u(y)) =_1 g(Eu(y + k_u + X) \geq_2 Eg(u(y + k_u + X)) =_3 \\ Ev(y + k_u + X) \Longrightarrow_4 k_u \leq k_v \end{aligned}$$

   Erklären Sie diese Schritte. (4)

5. Für eine bestimmte Zufallsvariable X_0 beobachten wir, daß die kompensierende Risikoprämie von Udo kleiner ist als die von Vera. Folgen daraus die beiden folgenden Behauptungen (oder evtl. nur eine)?

   (a) Für alle x gilt $-\frac{u''(x)}{u'(x)} < -\frac{v''(x)}{v'(x)}$.

   (b) $-\frac{u''(x)}{u'(x)} > -\frac{v''(x)}{v'(x)}$ kann nicht für alle x gelten.

   Begründen Sie Ihre Aussage jeweils. (3)

6. Formulieren Sie das logische Gegenteil zu Aussage C (2)

Auktionstheorie (20+2 Bonuspunkte)

3 Bieter beteiligen sich an einer Auktion über 1 Gut. Ihre Zahlungsbereitschaft ist entweder $\underline{v} = 10$ oder $\overline{v} = 18$, jeweils mit Wahrscheinlichkeit 50 %. Die Zahlungsbereitschaften der drei Bieter sind unabhängig voneinander.

1. Beschreiben Sie kurz (jeweils ein Satz reicht) die Regeln bei einer first price auction, second price auction, all pay auction. (3)

2. Was besagt das Revenue Equivalence Theorem? (kein Beweis!) (1)

3. Nehmen Sie an, A habe eine hohe Zahlungsbereitschaft und B und C haben eine niedrige Zahlungsbereitschaft, und dies ist allen Bietern bekannt. Gibt es ein eindeutiges Nash–Gleichgewicht bei einer second price auction? Falls es mehrere Gleichgewichte gibt, ist eines besonders überzeugend? (3)

4. Was ändert sich, wenn die Bieter nur jeweils ihre eigene Zahlungsbereitschaft kennen, nicht aber die der anderen Bieter? (2)

5. Betrachten Sie nun eine first price auction, wobei die Bieter nur ihre eigene Zahlungsbereitschaft kennen und keine schwach dominierten Strategien spielen. Zeigen Sie, daß ein Bieter mit hoher Zahlungsbereitschaft im Erwartungswert eine Rente von (etwa) 2 erhält. (2)

6. Zeigen Sie, daß es kein Gleichgewicht in reinen Strategien geben kann. (2)

7. Warum gilt für die Verteilungsfunktion $F(b)$, die die Strategie des Typs mit der hohen Zahlungsbereitschaft charakterisiert, folgende Gleichung:

$$[18 - b][\frac{1}{4} + \frac{1}{2}F(b) + \frac{1}{4}(F(b))^2] = 2$$

   Berechnen Sie das gemischte Gleichgewicht (Teil des Ergebnisses: $F(b) = \sqrt{\frac{8}{18-b}} - 1$). Achten Sie auch darauf, für beide Typen die Gleichgewichtsstrategie anzugeben. (4)

8. Wie hoch ist der erwartete Erlös bei dieser Auktion? (Hinweis: Benutzen Sie besser ein Ergebnis der Vorlesung als brutale Integration; natürlich gilt beides als Ergebnis, aber der Weg ist so deutlich schneller) (2)

9. Was ist die Wahrscheinlichkeit für A, die Auktion mit einem Gebot von 12 zu gewinnen? (1)

10. Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß B und C beide nur eine niedrige Zahlungsbereitschaft von jeweils 10 hatten, gegeben, daß A mit einem Gebot von 12 den Zuschlag erhalten hat? (2)