Ludwig-Maximilians-Universität München
Seminar für Versicherungswissenschaft
PD Achim Wambach, D.Phil. / Florian Englmaier
Entscheidungen bei Ungewissheit SS 2001

Diplomprüfung für Volkswirte

Klausur zu Vorlesung und Übung Entscheidungen bei Ungewissheit am 19.07.2001

In Block I sind alle Aufgaben zu bearbeiten. Außerdem müssen Sie **zwei** der drei Aufgaben aus Block II bearbeiten. Wenn Sie in Block II mehr als zwei Aufgaben bearbeiten werden nur die schlechteren beiden bei der Benotung berücksichtigt. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Hinter den Aufgaben stehen *ungefähre* Punktangaben. Insgesamt sind **120 Punkte** erreichbar.
Beachten Sie außerdem, daß Sie Ihre Prüfungsleistung im Feld "Fach" einem der Bereiche "VWL" oder "VWL der Versicherungen" verbindlich zuordnen müssen.
Vermerken Sie auf jedem Blatt zumindest Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**.
Als Hilfsmittel ist ein nicht-programmierbarer Taschenrechner zugelassen.

Viel Erfolg!

Block I: Grundlagen

1 Risikovergleiche (10 Punkte)

Grenzen Sie Mean Preserving Spread, First Order Stochastic Dominance und Second Order Stochastic Dominance voneinander ab. Erläutern Sie Ihre Antwort anhand einer graphischen Darstellung! Was ist der Unterschied zu einem *strong increase in risk*?

2 Versicherung (10 Punkte)

M. hat ein Anfangsvermögen von W und erleidet mit Wahrscheinlichkeit π einen Schaden von L. Mit der Gegenwahrscheinlichkeit $(1-\pi)$ bleibt M. von dem Schaden verschont. M.s Nutzenfunktion sei $u(w)$ mit $u' > 0$ und $u'' < 0$.
Die Arroganz Versicherungs AG bietet Andreas eine Versicherung an. Gegen Zahlung einer Prämienrate von p kann er sich Deckung C gegen den Schaden L kaufen.

a) Zeigen Sie, daß M. sich nicht voll versichert ($C < L$), falls gilt $p > \pi$.

b) Die Prämienrate p steigt an. Wie verändert sich die Nachfrage nach Versicherungsdeckung. Begründen Sie ihre Antwort (formal oder in einer Graphik)!

3 Nutzenfunktionen (15 Punkte)

In einer Ökonomie leben die drei Personen A, B und C. Die Nutzenfunktion des A sei gegeben durch $u_A(w) = \ln w$, die des B durch $u_B(w) = -e^{-\alpha w}$ und die des C durch $u_C(w) = w - \beta w^2$.

a) Untersuchen Sie die drei Bewohner hinsichtlich ihrer Risikoneigung. Für welche Parameterkonstellationen bilden diese Nutzenfunktionen die Präferenzen risikoaverser Individuen ab? Berechnen Sie das Pratt-Arrow-Maß der absoluten (relativen) Risikoaversion! Wie verändert sich die absolute bzw. relative Risikoaversion mit variierendem Ausgangsvermögen?

b) A und B haben dasselbe Ausgangsvermögen W und sind mit dem kleinen Risiko $\tilde{x}$ konfrontiert. Welches Individuum leidet stärker unter diesem Risiko?

4 Nutzenfunktionen II (10 Punkte)

Gustav Gans hat die Erwartungsnutzenfunktion $u(x) = x^2$.

a) Untersuchen Sie die Risikopräferenz von Gustav Gans.

b) Gustav Gans besitzt ein Anfangsvermögen von 10 und ein Lotterielos, das mit der Wahrscheinlichkeit von 50% einen Gewinn von 8 erzielt. Welchen Geldbetrag müssen Sie Gustav Gans mindestens für das Los bieten, wenn Sie es ihm abkaufen wollten? Berechnen Sie die Risikoprämie!

c) Wie sehen die Indifferenzkurven hier aus? Begründen Sie ihre Antwort anhand der Gleichung der Indifferenzkurven!

d) Skizzieren Sie in einem 2–Zustands–Diagramm:

* G's Anfangsausstattung
* die Indifferenzkurve durch G's Anfangsausstattung
* G's Sicherheitsäquivalent
* alle Punkte, bei denen G das gleiche Erwartungsvermögen hat wie bei seiner Anfangsausstattung

5 von Neumann - Morgenstern Axiome (15 Punkte)

Nennen und erläutern sie die Axiome, aus denen John von Neumann und Oskar Morgenstern das Theorem der Erwartungsnutzentheorie abgeleitet haben. Wie lautet das Theorem der Erwartungsnutzentheorie? Welche Axiome sind kritisch? Benennen Sie experimentelle Evidenz für Ihre Nennung!
Kann man aus den Axiomen folgern, daß die Funktion stetig und differenzierbar ist?

6 Risikovergleich (20 Punkte)

Es gebe fünf Zustände der Welt $s_i \in s_1, ..., s_5$ und zwei risikobehaftete Anlagen x_A und x_B deren Renditen in den einzelnen Zuständen folgendermaßen aussehen:
s_1: $x_A = 0,5$ und $x_B = 0,9$
s_2: $x_A = 0,5$ und $x_B = 0,8$
s_3: $x_A = 0,7$ und $x_B = 0,4$
s_4: $x_A = 0,7$ und $x_B = 0,3$
s_5: $x_A = 0,7$ und $x_B = 0,7$
Die Zustände $s_1, ..., s_5$ treten jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p_i \in p_1, ..., p_5$ mit $p_i \geq 0 \forall i$ auf.

a) Was muß für die Wahrscheinlichkeiten p_i gelten, damit die folgende Aussage wahr ist.

> Jeder Erwartungsnutzenmaximierer mit streng ansteigender Nutzenfunktion bevorzugt Anlage A gegenüber Anlage B?

Charakterisieren Sie die Werte der Wahrscheinlichkeiten so genau wie möglich und erklären Sie die notwendigen Bedingungen.

b) Was muß für die Wahrscheinlichkeiten p_i gelten, damit die folgende Aussage wahr ist:

> Jeder risikoaverse Erwartungsnutzenmaximierer bevorzugt Anlage A gegenüber Anlage B?

Denken Sie nach! Berechnen Sie keine Werte für die Wahrscheinlichkeiten!

c) Zeigen Sie, daß falls alle Wahrscheinlichkeiten $p_i = 0,2$ sind B im Sinne der SOSD riskanter ist als A. Argumentieren Sie grafisch oder formal!

Block II:
Beantworten Sie zwei der drei Fragen!

A Portfoliooptimierung (20 Punkte)

Ein Individuum habe eine Nutzenfunktion der Form $u(x) = \ln(x)$ und ein Anfangsvermögen von w. Ein Teil dieses Vermögen kann in eine sichere Anlage mit Rendite i investiert werden, der andere Teil in eine unsichere Anlage mit Rendite $\tilde{x}$, wobei $\tilde{x}$ entweder gleich 0.15 ist (mit Wahrscheinlichkeit 1/2) oder gleich 0.05 (mit Wahrscheinlichkeit 1/2). Das Individuum möchte nun ermitteln, welchen Betrag es in das riskante Wertpapier investieren soll.

a) Erläutern Sie das Maximierungsproblem des Individuums.

b) Ermitteln Sie den Betrag (a*), den das Individuum in das riskante Projekt investieren wird.
Tip: Nach einigen Umformungen ergibt sich ein einfacher Ausdruck für a*. Diskutieren Sie, inwiefern a* von i abhängt. Was passiert, wenn $i < 0,05$ bzw. $i > 0.15$ ist.)

c) Zeigen Sie, daß falls a* wohl definiert ist, und das Anfangsvermögen ansteigt, sich a* proportional zum Anstieg des Vermögens erhöht. Warum? Würde das entsprechende a* im Vermögen steigen oder fallen, wenn die Nutzenfunktion quadratisch wäre? Warum? Bestimmen Sie den Ausdruck $\partial \mathrm{a}^*/\partial i$. Zeigen Sie, daß dieser an der Stelle $i = 0.11$ negativ ist. War dieses Ergebnis zu erwarten?

B Signalsysteme (20 Punkte)

Der FC Bayern München steht im Halbfinale des Europapokals der Landesmeister gegen Real Madrid. Leider ist Jens Jeremies, der wichtige defensive Mittelfeldspieler, angeschlagen und die medizinische Abteilung kann nicht sicher sagen, ob er bis zum Spiel vollständig fit wird. Wenn man ihn einsetzt, obwohl er noch nicht vollständig fit ist, dann kann es passieren, daß er in einer wichtigen Situation nicht so souverän wie sonst agiert, und die Mannschaft deswegen verliert. Wenn man ihn nicht aufstellt, dann hat man nicht dieses Risiko, allerdings kann er nicht gleichwertig ersetzt werden.
Die medizinische Abteilung um Dr. Müller–Wohlfahrt kann dem Trainer aber durch eingehende Untersuchung ein Signal über den Schweregrad der Verletzung und die Genesungswahrscheinlichkeit geben.

	Jeremies wird fit	Jeremies wird nicht fit
Test negativ	$0,2$	$0,2$
Test positiv	$0,5$	$0,1$

Matrix der gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten

	Jeremies wird fit	Jeremies wird nicht fit
Jeremies spielt nicht	14.000.000	14.000.000
Jeremies spielt	20.000.000	2.000.000

Matrix der erwarteten Auszahlungen

a) Ermitteln Sie die a-posteriori und die bedingten Wahrscheinlichkeiten.

b) Welche Entscheidung wird Trainer Hitzfeld treffen, wenn er kein Signal aus der medizinischen Abteilung erhält? (Der FC Bayern und sein Trainer sind risikoneutral!)

c) Wieviel ist dieses Signal Wert? (Der FC Bayern ist risikoneutral!)

d) Wieviel würde der FC Bayern maximal für ein Signal ausgeben, daß mit Sicherheit feststellt ob Jeremies fit wird oder nicht? (Die Wahrscheinlichkeit, das das Signal positive bzw. negativ ist, ist genauso wie oben.)

e) Wann ist allgemein ein Signalsystem besser als ein anderes?

C Paretooptimale Risikoverteilung (20 Punkte)

In einer Ökonomie leben zwei risikoaverse Individuen, A und B. Diese sehen sich mit zwei möglichen Zuständen der Welt konfrontiert. Die Wahrscheinlichkeit, daß Zustand 1 eintritt beträgt π, die Wahrscheinlichkeit, daß Zustand 2 eintritt dagegen $(1-\pi)$. In Zustand 1 beträgt A's (B's) Vermögen w_{1A} (w_{1B}), in Zustand 2 w_{2A} (w_{2B}). Das soziale Vermögen in den beiden Zuständen der Welt ist als die Summe der individuellen Vermögen definiert ($w_1 = w_{1A} + w_{1B}$ and $w_2 = w_{2A} + w_{2B}$). Die zwei Agenten können nun einen Vertrag schreiben, in dem sie ihr Vermögen abhängig vom realisierten Zustand der Welt umverteilen.

a) Zeichnen Sie die Situation in eine Edgeworth-Box und markieren Sie die Menge der Pareto–effizienten Risiko–Allokationen falls

i kein soziales Risiko vorliegt.

ii soziales Risiko vorliegt.

Analysieren Sie die Situation, wenn einer der Agenten risikoneutral ist!

b) Lösen Sie das Problem des Sozialplaners (der ein Pareto-Optimum sucht) und zeigen Sie, daß im Optimum die Borch–Bedingung $[\frac{\pi u'_A(1)}{(1-\pi)u'_A(2)} = \frac{\pi u'_B(1)}{(1-\pi)u'_B(2)}]$ gilt.

c) Was besagt das Gegenseitigkeitsprinzip? Interpretieren Sie seine Bedeutung! Beweisen Sie seine Gültigkeit!