

KLAUSUR (31.7.1997)

Bearbeiten Sie 2 der folgenden 3 Aufgaben. Lesen Sie die Aufgaben sorgfältig durch, und beachten Sie die Bearbeitungshinweise.

In Klammern hinter den Teilaufgaben ist angegeben, wie stark diese in die Bewertung eingehen (s: sehr, m: mittel, w: wenig).

Viel Erfolg!

1. Portfoliomodell

Ein Individuum habe eine logarithmische Nutzenfunktion und ein Anfangsvermögen von W . Ein Teil dieses Vermögen kann in eine sichere Anlage mit Rendite i investiert werden, der andere Teil in eine unsichere Anlage mit Rendite $\tilde{x}$, wobei $\tilde{x}$ entweder gleich x_1 ist (mit Wahrscheinlichkeit p) oder gleich x_2 (mit Wahrscheinlichkeit $1-p$). Es gelte $x_1 < i < x_2$. Der Erwartungswert sei μ .

Das Individuum möchte nun ermitteln, welchen prozentualen Anteil seines Vermögens es in das riskante Wertpapier investieren soll.

- Erläutern Sie das Maximierungsproblem des Individuums. (m)
- Ermitteln Sie den optimalen prozentualen Anteil des Vermögens (α^*), den das Individuum in das riskante Projekt investieren wird. (Tip: Nach einigen Umformungen ergibt sich ein sehr einfacher Ausdruck für α^* .) Zeigen Sie, unter welchen Bedingungen α^* größer bzw. kleiner Null ist. (s)
- Wie ändert sich α^* , falls das Anfangsvermögen steigt? Warum? Was wäre das Ergebnis, wenn die Nutzenfunktion exponentiell wäre? (m)
- Ein weiteres Individuum habe die Nutzenfunktion $\sqrt{x}$. Argumentieren Sie (ohne es explizit auszurechnen), wie sich das optimale α^* im Vergleich zur logarithmischen Nutzenfunktion ändert. (r)
- Nehmen Sie an, x_1 falle und x_2 steige, wobei der Erwartungswert konstant bleibt. Zeigen Sie, daß in diesem Falle α^* fällt und begründen Sie dies. Können Sie eine (argumentative und formale) Aussage darüber machen, wie sich α^* bei einem beliebigen Anstieg des Risikos ändern würde? (s)
- Die Rendite des sicheren Projektes i steigt an. Unter der Annahme, daß $x_1 + x_2 > 2i$ und $\mu < 1$ ist, zeigen Sie, daß α^* fällt. Kann man allgemein sagen, ob der in das riskante Projekt investierte Anteil fällt (mit Begründung)? (m)

2. Informationsökonomie - Flexibilitätsoption

Die Tour de Bavaria hat soeben begonnen. Der Favorit des Teams BT (Bayerische Telekommunikation), Fahrer A, zeigt am zweiten Tag einen Leistungsabfall, er ist nur 10ter der Tageswertung. Der zweite Fahrer des Teams (Fahrer B) ist noch sehr jung und unerfahren, liegt aber schon an zweiter Stelle des Gesamtklassements. Noch sind einige Tage zu fahren. Die Leitung des Teams BT hat folgende Handlungsmöglichkeiten:

- 1) Fahrer A als Favoriten fahren zu lassen, d.h. die anderen Fahrer müssen Fahrer A unterstützen und dürfen selber nicht gewinnen.
- 2) Fahrer B als Favoriten einzusetzen.
- 3) Noch einen Tag zu warten, um genauere Informationen über die Grippe zu erhalten, und erst dann entweder Fahrer A oder Fahrer B zum Favoriten zu erklären.

Zur Vereinfachung nehmen Sie folgendes an:

Es gibt nur zwei Zustände der Welt, Fahrer A hat eine schwere Grippe (z_1) oder eine leichte Grippe (z_2). Wenn das Team einen Tag wartet, erhält es eins von zwei möglichen Signalen, nämlich Fahrer A ist schlecht gefahren (S1) oder Fahrer A ist gut gefahren (S2). Die Matrix der gemeinsamen

S1 S2

Wahrscheinlichkeiten sei:

z_1	0.2	0.1
z_2	0.2	0.5

(Zur Interpretation: Die Wahrscheinlichkeit, daß Fahrer A eine schwere Grippe hat und gut fährt ist 0.1, etc.)

Der Chef des Teams errechnet sich die folgenden zustandsabhängigen Auszahlungen, wenn er Fahrer A

	z_1	z_2
zum Favoriten erklärt (a_1) bzw. Fahrer B (a_2):	a_1	1000 10000
	a_2	7000 7000

(Zur Interpretation: Wenn Fahrer A als Favorit erklärt wird, er aber schwere Grippe hat, ist die Auszahlung 1000, etc.)

- a) Ermitteln Sie die Matrizen der bedingten und der a-posteriori Wahrscheinlichkeiten. Berechnen Sie die a-priori Wahrscheinlichkeiten und die Wahrscheinlichkeiten der Signale. (m)
- b) Verifizieren Sie, daß der Teamchef, falls er nicht bis morgen warten will, Fahrer A als Favoriten nominiert. (w)
- c) Der Berater des Teamchefs errechnet, daß wenn der Teamchef mit seiner Entscheidung um einen Tag wartet, das Team 500 DM verlieren würde, da die Werbebranchen nur eindeutige Favoriten finanziert. Wird der Teamchef trotzdem einen Tag warten, um seine Entscheidung zu fällen? Wie hoch wäre der maximale Verlust, den er in Kauf nehmen würde? (s)
- d) Wann kann man im allgemeinen sagen, daß ein Signalsystem einen positiven Wert hat? Gibt es Fälle, wo es einen negativen Wert haben kann? (w)
- e) Der Hauptsponsor von Fahrer B bietet an, dem Team 450 DM zu zahlen, falls es schon heute den Fahrer B als Favoriten nominiert. Wird der Teamchef darauf eingehen? (w)
- f) Der Chefarzt der Uniklinik München erfährt von dem Problem des Teams und bietet eine neuartige Grippeuntersuchung an, die den Zustand des Fahrers A genauer ermitteln kann. Diese Untersuchung macht Fehlaussagen nur in 10% aller Fälle, d.h. 10% aller schweren Grippe werden als leichte beurteilt, und 10% aller leichten Grippe als schwere. Leider kostet diese Untersuchung 1400 DM. Wird der Teamchef veranlassen, diese Untersuchung durchzuführen? (Nehmen Sie an, daß wenn eine schwere Grippe festgestellt wird, Fahrer B zum Favoriten erklärt wird, wenn eine leichte Grippe festgestellt wird, Fahrer A der Favorit wird.) (s)
- g) Wie kann man allgemein feststellen, ob ein Signalsystem besser ist als ein anderes? Vergleichen Sie obige Signalsysteme, indem Sie die jeweiligen Matrizen der bedingten Wahrscheinlichkeiten betrachten. (m)

3. Marktgleichgewicht

Eine Marktwirtschaft bestehe aus 2 Individuen, die beide eine logarithmische Nutzenfunktion haben. Es gibt zwei gleich wahrscheinliche Zustände der Welt (s und t), die zu folgenden Ausgangsvermögen der beiden Individuen führen:

$$W_{01}(s) = 5 \quad W_{02}(s) = 4$$

$$W_{01}(t) = 5 \quad W_{02}(t) = 7$$

- a) Erklären Sie anhand obiger Zahlenwerte in einem geeigneten Diagramm den Unterschied zwischen individuellem und sozialem Risiko. (m)
- b) Zeigen Sie, daß das Risiko Pareto optimal verteilt ist, wenn für beide Individuen das Einkommen im Zustand t $4/3$ des Einkommens im Zustand s beträgt. (Tip: Setzen Sie die Grenzrate der Substitution zwischen den beiden Zuständen gleich λ , nutzen Sie die Ressourcenbeschränkung und zeigen Sie, daß λ nur einen Wert annehmen kann.) Zeichnen Sie die Kontrakt Kurve in das Diagramm ein, und interpretieren Sie ihre Form. (s)
- c) Nehmen Sie nun an, ein vollständiger Arrow-Wertpapier Markt existiert. Ermitteln Sie aus der Rechnung von Aufgabe b) die kompetitiven Gleichgewichtspreise, wobei Sie p_t , den Preis des Wertpapiers des Zustands t , gleich 1 setzen. (Die Summe der Preise ist dann größer als 1.) Nutzen Sie die Budgetgleichung der Individuen und Ihr Wissen aus Teil b), um das Endvermögen beider Individuen auszurechnen. Zeichnen Sie die entsprechende Budgetgerade und die Lösung in obiges Diagramm ein. (s)
- d) In der Realität beobachtet man keinen Arrow Wertpapier Markt. Wie kann man dennoch diese Annahme als Arbeitshypothese rechtfertigen? (w)

Bei obigem Problem sind nun zwei Wertpapiere gegeben, die folgende Auszahlungen aufweisen:

$a1: (2,1)$ und $a2: (1,3)$. Das heißt, Wertpapier $a1$ hat die Auszahlung 2 DM im Zustand der Welt s und 1 DM im Zustand der Welt t , für $a2$ gilt das analoge. Individuum 1 habe als Anfangsausstattung 2 Wertpapiere vom Typ $a1$ und 1 Papier vom Typ $a2$. Individuum 2 hat 1 Wertpapier vom Typ $a1$ und 2 Wertpapiere vom Typ $a2$.

- e) Verifizieren Sie, daß obige Anfangsvermögensangaben korrekt sind. (w)
- f) Ist der Markt vollständig? Warum? (w)
- g) Wie hoch ist der kompetitive Preis der einzelnen Wertpapiere? (w)
- h) Nicht immer sind Märkte vollständig. Welche Probleme können auftreten, wenn Märkte unvollständig sind? (w)