

## Klausur (16.7.1999)

Lösen Sie zwei der folgenden Aufgaben, wobei Aufgabe 1 in jedem Fall bearbeitet werden muß.

In Klammern hinter den Teilaufgaben ist angegeben, wie stark diese in die Bewertung der Aufgabe eingehen (s:sehr, m: mittel, w: wenig). Aufgabe 1 geht etwas stärker in die Gewichtung ein als Aufgabe 2 bzw. 3.

Viel Erfolg!

### 1. Ein Sammelsurium an Aufgaben

#### 1.1. Erwartungsnutzentheorie

(m)

- Welche Axiome benötigen von Neumann und Morgenstern zur Herleitung der Erwartungsnutzentheorie. Diskutieren Sie kurz die Relevanz der Axiome.
- Inwiefern ist die Nutzenfunktion kardinal? Wieso ist dies kein Widerspruch zur Annahme, daß Individuen ordinale Präferenzordnungen haben?
- Welche plausiblen Eigenschaften kann man der (Bernoulli-) Nutzenfunktion zuschreiben? Wieso?

#### 1.2. Risikoaversion

(w)

Gegeben sei eine Lotterie  $L$ , und zwei Individuen mit Nutzenfunktionen  $U_1$  und  $U_2$ , die beide ein Vermögen von  $W$  haben.

- Was bedeutet die folgende Aussage: Bezüglich Lotterie  $L$  ist Individuum 1 risikoaverser als Individuum 2?
- Welche Bedingungen müssen  $U_1$  und  $U_2$  erfüllen, damit obige Aussage für beliebige, aber kleine  $L$  gilt?
- Welche Bedingungen müssen  $U_1$  und  $U_2$  erfüllen, damit obige Aussage für beliebige  $L$  gilt?

#### 1.3. Risiko-Verteilung

(m)

- Was genau sagt die Borch-Bedingung? Interpretieren Sie den formalen Ausdruck.
- In welchen Fällen trägt ein risikoaverses Individuum optimalerweise ein Risiko?
- Leiten Sie aus der Borch-Bedingung das Gegenseitigkeitsprinzip her. Erläutern Sie dieses (auch falls Sie es nicht herleiten können).

#### 1.4. Suchmodelle

(m)

Ansgar bewirbt sich auf eine Professur. Die Bewerbung verläuft erfolgreich, und Ansgar bekommt ein Angebot mit einem Jahresgehalt von 100.000 DM. Nun ist eine zweite Stelle ausgeschrieben. Falls Ansgar sich bewirbt, würde er mit Sicherheit ein Angebot bekommen. Bewerbungskosten (inkl. Vortrag, Reise, Unterlagen, etc.) sind allerdings recht hoch (500 DM). Ansgar geht davon aus, daß das Angebot der zweiten Universität irgendwo zwischen 95000 und 105000 DM liegt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, die Gehaltserwartung sei gleichverteilt. Ansgar ist risikoneutral. Falls Ansgar sich allerdings weiter bewirbt, verfällt die erste Stelle, da die Zusage schnell erfolgen muß. (Dies ist kein Modell für den deutschen Professorenmarkt!)

- Soll Ansgar sich bei der zweiten Universität bewerben?
- Was wäre das Angebot der ersten Universität, bei dem Ansgar genau indifferent zwischen akzeptieren und weiter bewerben ist.
- Nehmen Sie an, Sie wären Dekan, und die Welt wäre voller Ansgars. Wie hoch würden sie das Gehalt setzen? Warum ist die problematisch, falls sich alle Dekane so verhalten würden?
- Wie läßt sich die Schlußfolgerung aus c) durch eine Erweiterung des Modells umgehen?

## 2. Portfoliomodell

Ein Individuum habe eine Nutzenfunktion der Form  $u(x)=\ln(x)$  und ein Anfangsvermögen von 100. Ein Teil dieses Vermögen kann in eine sichere Anlage mit Rendite  $i$  investiert werden, der andere Teil in eine unsichere Anlage mit Rendite  $\tilde{x}$ , wobei  $\tilde{x}$  entweder gleich 0.1 ist (mit Wahrscheinlichkeit 1/2) oder gleich 0.0 (mit Wahrscheinlichkeit 1/2).

Das Individuum möchte nun ermitteln, welchen Betrag es in das riskante Wertpapier investieren soll.

- Erläutern Sie das Maximierungsproblem des Individuums. (w)
- Ermitteln Sie den Betrag ( $a^*$ ), den das Individuum in das riskante Projekt investieren wird. (Tip: Nach einigen Umformungen ergibt sich ein sehr einfacher Ausdruck für  $a^*$ .) Diskutieren Sie, inwiefern  $a^*$  von  $i$  abhängt. (Es ist nicht nötig, den genauen Zahlenwert von  $a^*$  auszurechnen.) Überlegen Sie sich genau, was passiert, wenn  $i < 0$  bzw.  $i > 0.1$  ist. (s)
- Zeigen Sie, daß falls  $a^*$  wohl definiert ist, und das Anfangsvermögen 200 anstatt 100 beträgt, sich  $a^*$  verdoppelt. Warum? Würde das entsprechende  $a^*$  steigen oder fallen, wenn die Nutzenfunktion quadratisch wäre? Warum? (m)
- Bestimmen Sie den Ausdruck  $da^*/di$ . Zeigen Sie, daß dieser an der Stelle  $i=0.08$  negativ ist. Was dieses Ergebnis zu erwarten? (m)

Das Individuum bekommt vor seinem Kauf ein Signal, das zwei mögliche Realisationen haben kann: Falls das Signal gut ist, so ist der Zustand 0.1 wahrscheinlicher (2/3 anstatt 1/2). Falls das Signal schlecht ist, so ist 0.0 wahrscheinlicher (3/4 anstatt 1/2).

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß das Signal gut ist. (m)
- Wieviel wäre das Individuum bereit, für dieses Signal zu zahlen (schreiben Sie nur die definierende Gleichung hin, rechnen Sie sie nicht aus.) (w)

## 3. Anstieg des Risikos/Vorsorgesparsen

- Was ist der Unterschied zwischen ‚First Order Stochastic Dominance‘ (FOSD), ‚Second Order Stochastic Dominance‘ (SOSD) und ‚Mean Preserving Spread‘ (MPS)? (m)

Für die folgenden Aufgaben wird benötigt, daß falls eine Verteilung  $G(x)$  ein MPS von  $F(x)$  ist, so ist dies äquivalent dazu, daß für alle konkaven Funktionen  $v(x)$  gilt:  $\int v(x)dG(x) < \int v(x)dF(x)$

(Bei konvexen Funktionen gilt die umgekehrte Ungleichung.)

- Ein Individuum habe die intertemporale Nutzenfunktion  $u(c_1)+u(c_2)$ , wobei  $c_1 = y_1 - s$  ist, und  $c_2 = y_2 + s$ , wobei  $u' > 0$ , und  $u'' < 0$ . Erklären Sie die Variablen. (w)
- Falls beide Einkommen sicher sind, wieviel wird das Individuum sparen? Warum? Was ist der Zusammenhang zwischen dieser Sparsentscheidung und einer Versicherungsentscheidung? (m)
- Nun sei  $y_1$  sicher, aber das Einkommen in Periode 2 ( $y_2$ ) unsicher. (Die Verteilung für  $y_2$  sei gegeben durch  $F(y)$ .) Bestimmen Sie die definierende Gleichung für das optimale Sparverhalten. (w)
- Sei  $G(y)$  ein MPS von  $F(y)$ . Unter welchen Bedingungen wird das Individuum bei  $G(y)$  mehr als bei  $F(y)$  sparen? Was hat dieses Ergebnis mit ‚Prudence‘ ( $-u'''/u''$ ) zu tun? (m)
- Nun sei  $c_2 = y_2 + (1+i)s$ , wobei  $i$  der Zinssatz ist. Bei sicherem Einkommen in beiden Perioden, und einem unsicherem Zinssatz, wie sieht dann die definierende Gleichung für das optimale Sparverhalten aus. (w)
- Was passiert, wenn beim Zinssatz das Risiko bzgl. eines MPS ansteigt? Ist das Ergebnis eindeutig? (m)
- Indem Sie eine Parallele zum optimalen Portfolioproblem aus der Vorlesung ziehen – diskutieren Sie mögliche Reaktionen zu dem Ergebnis aus g). (w)