Seminar für Versicherungswissenschaft WS 1997/98

Prof. Ray Rees

Diplomprüfung im Fach Volkswirtschaftslehre

Mathematische Anwendungen in der VWL

27.2.1998

Erlaubte Hilfsmittel: Nicht-programmierbarer Taschenrechner.

Sie haben für die Bearbeitung der folgenden 3 Aufgaben 120 Minuten Zeit. Für Aufgabe 1 gibt es etwa 15% der Punkte, für Aufgabe 2 etwa 40% und für Aufgabe 3 etwa 45% der Punkte.

Lesen Sie alle Aufgaben zuerst aufmerksam durch und nehmen Sie sich Zeit zum Nachdenken, bevor Sie anfangen zu rechnen.

Alle Aufgaben müssen bearbeitet werden.

Alle Antworten müssen begründet werden.

Viel Erfolg!

1. Ein Individuum maximiert seinen Nutzen $u(x_1, x_2)$ unter den Nebenbedingungen einer Geld- sowie einer Zeitbeschränkung.
   (a) Geben Sie das Optimierungsproblem sowie die Lagrangefunktion an.
   (b) Zeichnen Sie in einem Diagramm eine plausible Budgetmenge sowie verschiedene Möglichkeiten des optimalen Güterbündels ein. Welchen Wert haben jeweils die Lagrangeparameter (Begründung)?
   (c) Nehmen Sie an, daß der Konsument Zeit auf einem Arbeitsmarkt zum festen Preis w kaufen oder verkaufen kann. Zeigen Sie verbal und mit Hilfe Ihrer Zeichnung, daß der Konsument dadurch nicht schlechter gestellt werden kann und im allgemeinen besser gestellt wird.

2. Ein gewinnmaximierender Monopolist produziert ein Gut x mit der Kostenfunktion $C(x) = c \cdot x$. Die Preis-Absatz-Funktion ist $p(x)$ mit $p'(x) < 0$. Der Staat belegt die Produktion von x mit einer Mengensteuer in Höhe von $T(x, t) = t \cdot x$, $(t > 0)$.

   (a) Berechnen Sie die notwendige Bedingung erster Ordnung für ein Gewinnmaximum (mit und ohne Steuer) und interpretieren Sie die auftretenden Größen ökonomisch.

   (b) Nehmen Sie an, daß der Staat den Grenzsteuersatz t marginal erhöht. Wie ändert sich dadurch die optimale Menge des Monopolisten? Welche Bedingung brauchen Sie noch, um das Vorzeichen der Mengenreaktion bestimmen zu können? Begründen Sie die Mengenreaktion ökonomisch.

   (c) Nehmen Sie an, daß der Staat das Steueraufkommen durch geeignete Wahl von t maximieren will. Berechnen Sie die Bedingung erster Ordnung für den Staat und geben Sie die Vorzeichen der auftretenden Größen an.

   (d) Begründen Sie rechnerisch, warum der Staat sein Steueraufkommen noch weiter steigern könnte, wenn er t, ausgehend von der Lösung t^* in Teilaufgabe (c), senken würde und dem Monopolisten dafür pauschal Geld abnimmt.

3. In einem See werden Fische (y) gefangen. Die Preis-Absatz-Funktion ist gegeben durch $p(y)$ mit $p'(y) < 0$. Die Fangkosten hängen über die Kostenfunktion $c(y)$ mit $c'(y) > 0$, $c''(y) > 0$ von der gefangenen Menge y ab. Nehmen Sie an, daß $p(0) > c'(0)$.

   (a) Ein sozialer Planer möchte die Fangmenge so festlegen, daß der soziale Überschuß $W(y)$ maximiert wird. Geben Sie einen sinnvollen Ausdruck für den sozialen Überschuß an, der auf den obigen Größen beruht. Berechnen Sie die Bedingung erster Ordnung für die sozial optimale Menge y^*. Zeigen Sie, daß die Bedingung zweiter Ordnung auch erfüllt ist. Zeigen Sie, daß für die Funktion $W(y)$ folgendes gilt: $W'(0) > 0$

und $W''(y) < 0$ (Wenn Sie dies nicht zeigen können, dürfen Sie diese Eigenschaften für den Rest der Aufgabe voraussetzen).

(b) Betrachten Sie im folgenden ein dynamisches Problem. Der Fischbestand zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $s(0) = s_0 > 0$ und natürlich kann der Fischbestand $s(t)$ nie negativ sein. Die Fische vermehren sich gemäß der Funktion $\delta(s)$, wobei $\delta'(s) > 0$, $\delta''(s) < 0$. Es gilt also $\dot{s} = \delta(s) - y$. Der soziale Planer möchte den Barwert der sozialen Überschüsse bis zum festen Endzeitpunkt $T < \infty$ maximieren; die Diskontrate ist $r > 0$. Stellen Sie das Optimierungsproblem und die Nebenbedingungen auf. Geben Sie die Hamiltonfunktion an und berechnen Sie die notwendigen Bedingungen für ein Optimum.

(c) Nehmen Sie an, daß für den Schattenpreis μ gilt, daß $\mu(0) = 0$. Was bedeutet dies für den Zeitpfad der Abbaumenge y? Vergleichen Sie $y(t)$ mit y^* aus Teilaufgabe (a).

(d) Nehmen Sie für den Rest der Aufgabe an, daß $\mu(0) > 0$ und vergleichen Sie auch für diesen Fall $y(t)$ mit der sozial optimalen Menge y^* aus Teilaufgabe (a). Berechnen Sie die Bedingungen für $\dot{s} = 0$ sowie $\dot{y} = 0$. Zeigen Sie, daß der Steady-State $(\hat{s}, \hat{y})$ ein Sattelpunkt ist und zeichnen Sie ein Phasendiagramm im (s, y)-Raum, in dem Sie die obigen Ergebnisse berücksichtigen. Zeichnen Sie den Sattelpunktpfad sowie die anderen relevanten Trajektorien ein.

(e) Nehmen Sie an, daß es erlaubt ist, die Fische bis zum Endzeitpunkt T auszurotten, d.h. $s(T) \geq 0$. Weiterhin sei $s(0) > \hat{s}$. Zeichnen Sie Trajektorien für zwei Zeiträume T_1 und T_2 mit $T_1 < T_2$ in ein neues Phasendiagramm ein. Welche Trajektorie entspricht welchem Zeitraum? Begründen Sie ihre Antwort ökonomisch.

(f) Nehmen Sie an, daß der Fischbestand am Ende der Zeit nicht kleiner als am Anfang sein darf, d.h. $s(T) \geq s(0)$. Wieder sei $s(0) > \hat{s}$. Zeichnen Sie Trajektorien für zwei Zeiträume T_1 und T_2 mit $T_1 < T_2$, in ein neues Phasendiagramm ein. Welche Trajektorie entspricht welchem Zeitraum? Begründen Sie ihre Antwort ökonomisch.